

# Variables aléatoires discrètes

1. CONTEXTE. Soit un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

## Définitions

2. DÉFINITION. Une *variable aléatoire*  $X$  sur  $(\Omega, \mathcal{A})$  est une application

$$X \begin{cases} \Omega & \longrightarrow & X(\Omega) \\ \omega & \longmapsto & X(\omega) \end{cases}$$

telle que pour tout  $B \subset X(\Omega)$ ,  $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ . Ainsi,  $X^{-1}(B)$  est un évènement, noté

$$(X \in B) = \{X \in B\} = X^{-1}(B).$$

Pour tout  $x \in X(\Omega)$ , on note

$$(X = x) = X^{-1}(\{x\}).$$

3. DÉFINITION.  $X$  est une *variable aléatoire discrète* si  $X(\Omega)$  est au plus dénombrable.

4. DÉFINITION.  $X$  est une *variable aléatoire réelle* si  $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$ . Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on note

$$(X \leq x) = X^{-1}([-\infty, x]),$$

$$(X < x) = X^{-1}([-\infty, x[).$$

5. DÉFINITION.  $X$  est une *variable aléatoire complexe* si  $X(\Omega) \subset \mathbb{C}$ .

6. DÉFINITION. Si  $X$  est une variable aléatoire discrète et  $f$  une application définie sur  $X(\Omega)$ ,  $f(X)$  est la variable aléatoire

$$f(X) \begin{cases} \Omega & \longrightarrow & f(X(\Omega)) \\ \omega & \longmapsto & f(X(\omega)). \end{cases}$$

7. CONTEXTE. Désormais, toutes les variables aléatoires rencontrées sont discrètes, réelles ou complexes. En particulier, considérons deux variables aléatoires  $X$  et  $Y$ .

## Loi

8. DÉFINITION. La *loi (de probabilité) de  $X$*  est

$$P_X \begin{cases} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow & [0, 1] \\ B & \longmapsto & P(X^{-1}(B)). \end{cases}$$

Pour tout  $B \subset X(\Omega)$ , on note

$$P(X \in B) = P_X(B).$$

Pour tout  $x \in X(\Omega)$ , on note

$$P(X = x) = P_X(\{x\}).$$

9. THÉORÈME. La loi de  $X$  est une probabilité sur  $(X(\Omega), \mathcal{P}(X(\Omega)))$ .

10. THÉORÈME. La loi de  $X$  est caractérisée par la distribution de probabilités  $(P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ .

11. NOTATION. Si  $P_X = P_Y$ , on note  $X \sim Y$ .

## Couples

12. DÉFINITIONS. L'application

$$\begin{cases} \Omega & \longrightarrow & X(\Omega) \times Y(\Omega) \\ \omega & \longmapsto & (X(\omega), Y(\omega)) \end{cases}$$

est une variable aléatoire discrète, appelée *couple des variables aléatoires  $X$  et  $Y$*  et notée  $(X, Y)$ .

Pour tout  $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ , on note

$$(X = x, Y = y) = ((X, Y) = (x, y)) = (X = x) \cap (Y = y).$$

13. DÉFINITIONS. La loi de  $(X, Y)$  est la *loi conjointe* du couple. Les lois de  $X$  et de  $Y$  sont les *lois marginales* du couple.

14. DÉFINITIONS. Pour tout  $y \in Y(\Omega)$  tel que  $P(Y = y) \neq 0$ , la *loi conditionnelle de  $X$  sachant  $(Y = y)$*  est définie pour tout  $x \in X(\Omega)$  par

$$P(X = x | Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

De même, on définit la *loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $(X = x)$*  si  $P(X = x) \neq 0$ .

15. THÉORÈME. Pour tout  $x \in X(\Omega)$ ,

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x | Y = y) P(Y = y).$$

De même, on exprime la loi marginale de  $Y$  à l'aide des lois conditionnelles de  $Y$  sachant les  $(X = x)$ .

## Indépendance

16. DÉFINITION.  $X$  et  $Y$  sont *indépendantes*, et on note  $X \perp\!\!\!\perp Y$ , si pour tout  $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ ,

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x) P(Y = y).$$

17. THÉORÈME.  $X \perp\!\!\!\perp Y$  si et seulement si pour tous  $A \subset X(\Omega)$  et  $B \subset Y(\Omega)$ ,

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A) P(Y \in B).$$

18. THÉORÈME. Si  $X \perp\!\!\!\perp Y$ , alors pour toutes fonctions  $f$  et  $g$ ,  $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$ .

19. DÉFINITIONS. Soit  $(X_i)_{i \in I}$  une famille au plus dénombrable de variables aléatoires discrètes.

Les  $X_i$  sont *indépendantes* si pour tout sous-ensemble fini  $J \subset I$  et tout  $(x_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} X_j(\Omega)$ ,

$$P\left(\bigcap_{j \in J} (X_j = x_j)\right) = \prod_{j \in J} P(X_j = x_j).$$

Les  $X_i$  sont *identiquement distribuées* si elles ont toutes la même loi.

Si  $I = \mathbb{N}$  et que les  $X_i$  sont indépendantes et identiquement distribuées, on parle de suite *i.i.d.*

20. LEMME DES COALITIONS. Si des variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes, alors pour tout  $m \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$  et toutes fonctions  $f$  et  $g$ ,

$$f(X_1, \dots, X_m) \perp\!\!\!\perp g(X_{m+1}, \dots, X_n).$$

## Espérance

21. DÉFINITION. Si  $X$  est à valeurs dans  $[0, +\infty]$ , l'espérance de  $X$  est

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x),$$

en convenant que  $x P(X = x) = 0$  si  $x = +\infty$  et  $P(X = x) = 0$ .

22. DÉFINITION. Si  $X$  est réelle ou complexe,  $X$  est d'espérance finie si la famille  $(x P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$  est sommable. Dans ce cas, l'espérance de  $X$  est

$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x P(X = x).$$

23. DÉFINITION.  $X$  est centrée si  $E(X) = 0$ .

24. THÉORÈME. Si  $X$  est à valeurs dans  $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ ,

$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k).$$

25. THÉORÈME. Si  $|X| \leq Y$  et que  $E(Y) < +\infty$ , alors  $X$  est d'espérance finie.

26. THÉORÈME DU TRANSFERT. Pour toute fonction  $f$ ,  $f(X)$  est d'espérance finie si et seulement si la famille  $(f(x) P(X = x))_{x \in X(\Omega)}$  est sommable. Dans ce cas,

$$E(f(X)) = \sum_{x \in X(\Omega)} f(x) P(X = x).$$

27. CONTEXTE. Supposons  $X$  et  $Y$  d'espérance finie.

28. THÉORÈME. Si  $X \perp Y$ , alors  $XY$  est d'espérance finie et  $E(XY) = E(X)E(Y)$ .

29. THÉORÈME. L'espérance est linéaire : pour tout  $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ ,  $aX + bY$  est d'espérance finie et

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y).$$

En particulier,  $E(aX + b) = aE(X) + b$ .

30. THÉORÈME. L'espérance est positive : si  $X$  est réelle et positive, alors  $E(X) \geq 0$ .

31. THÉORÈME. Si  $X$  est réelle, positive et centrée, alors  $(X = 0)$  est presque sûr.

32. THÉORÈME. L'espérance est croissante : si  $X$  et  $Y$  sont réelles et que  $X \leq Y$ , alors  $E(X) \leq E(Y)$ .

## Variance et covariance

33. CONTEXTE. Supposons  $X$  et  $Y$  réelles telles que  $X^2$  et  $Y^2$  sont d'espérance finie.

34. THÉORÈME.  $X$ ,  $Y$ ,  $XY$  et  $(X+Y)^2$  sont d'espérance finie.

35. DÉFINITIONS.

La variance de  $X$  est  $V(X) = E((X - E(X))^2)$ .

L'écart type de  $X$  est  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ .

La covariance de  $(X, Y)$  est

$$\text{Cov}(X, Y) = E((X - E(X))(Y - E(Y))).$$

36. DÉFINITIONS.

$X$  est réduite si  $V(X) = 1$ .

$X$  et  $Y$  sont décorréliées si  $\text{Cov}(X, Y) = 0$ .

37. THÉORÈME DE KÖNIG-HUYGENS.

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2,$$

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

38. THÉORÈME. Pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ,  $(aX + b)^2$  est d'espérance finie et  $V(aX + b) = a^2 V(X)$ .

39. THÉORÈME.

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \text{Cov}(X, Y).$$

40. THÉORÈME. Si  $X \perp Y$ , alors  $X$  et  $Y$  sont décorréliées et  $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ .

## Inégalités

41. INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ.

$$E(XY)^2 \leq E(X^2)E(Y^2).$$

Il y a égalité si et seulement s'il existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $(aX + bY = 0)$  soit presque sûr.

42. INÉGALITÉ DE MARKOV. Si  $X \geq 0$ ,

$$\forall a > 0, P(X \geq a) \leq \frac{E(X)}{a}.$$

43. INÉGALITÉ DE BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV.

$$\forall b > 0, P(|X - E(X)| \geq b) \leq \frac{V(X)}{b^2}.$$

44. LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES. Soit  $(X_n)_{n \geq 1}$  une suite i.i.d. telle que  $X_1^2$  soit d'espérance finie. Notons  $m = E(X_1)$ ,  $\sigma = \sigma(X_1)$  et pour tout  $n \geq 1$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ . Alors,

$$\forall \varepsilon > 0, \forall n \in \mathbb{N}^*, P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$

En conséquence,

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - m\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

## Fonction génératrice

45. CONTEXTE. Supposons  $X$  et  $Y$  à valeurs dans  $\mathbb{N}$ .

46. DÉFINITION. La fonction génératrice de  $X$  est

$$G_X : t \mapsto G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n) t^n.$$

47. THÉORÈME. Le rayon de convergence de cette série entière est au moins égal à 1, et  $G_X$  est définie au moins sur  $[-1, 1]$ .

48. THÉORÈME. La loi de  $X$  est caractérisée par sa fonction génératrice  $G_X$ .

49. THÉORÈME.  $X$  admet une espérance si et seulement si  $G_X$  est dérivable en 1, et dans ce cas,  $E(X) = G'_X(1)$ .

50. THÉORÈME. Si  $X \perp Y$ , alors pour tout  $t \in [-1, 1]$ ,

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t),$$

en notant  $G_Y$  et  $G_{X+Y}$  les fonctions génératrices de  $Y$  et  $X + Y$  respectivement.