Variables aléatoires discrètes

1. Contexte. Soit un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

Définitions

2. Définition. Une *variable aléatoire X sur $(\Omega, \mathscr{A})$* est une application

$$X : \Omega \to X(\Omega),\ \omega \mapsto X(\omega)$$

telle que pour tout $B \subset X(\Omega)$, $X^{-1}(B) \in \mathscr{A}$. Ainsi, $X^{-1}(B)$ est un évènement, noté

$$(X \in B) = \{X \in B\} = X^{-1}(B).$$

Pour tout $x \in X(\Omega)$, on note

$$(X = x) = X^{-1}(\{x\}).$$

3. Définition. X est une *variable aléatoire discrète* si $X(\Omega)$ est au plus dénombrable.

4. Définition. X est une *variable aléatoire réelle* si $X(\Omega) \subset \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note

$$(X \leqslant x) = X^{-1}(]-\infty, x]),$$
$$(X < x) = X^{-1}(]-\infty, x[).$$

5. Définition. X est une *variable aléatoire complexe* si $X(\Omega) \subset \mathbb{C}$.

6. Définition. Si X est une variable aléatoire discrète et f une application définie sur $X(\Omega)$, $f(X)$ est la variable aléatoire

$$f(X) : \Omega \to f(X(\Omega)),\ \omega \mapsto f(X(\omega)).$$

7. Contexte. Désormais, toutes les variables aléatoires rencontrées sont discrètes, réelles ou complexes. En particulier, considérons deux variables aléatoires X et Y.

Loi

8. Définition. La *loi (de probabilité) de X* est

$$P_X : \mathscr{P}(X(\Omega)) \to [0,1],\ B \mapsto P(X^{-1}(B)).$$

Pour tout $B \subset X(\Omega)$, on note

$$P(X \in B) = P_X(B).$$

Pour tout $x \in X(\Omega)$, on note

$$P(X = x) = P_X(\{x\}).$$

9. Théorème. La loi de X est une probabilité sur $(X(\Omega), \mathscr{P}(X(\Omega)))$.

10. Théorème. La loi de X est caractérisée par les $P(X = x)$, où $x \in X(\Omega)$.

11. Notation. Si $P_X = P_Y$, on note $X \sim Y$.

Couples

12. Définition. L'application

$$\Omega \to X(\Omega) \times Y(\Omega),\ \omega \mapsto (X(\omega), Y(\omega))$$

est une variable aléatoire discrète, appelée *couple des variables aléatoires X et Y* et notée (X, Y).

Pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, on note

$$(X{=}x, Y{=}y) = ((X, Y){=}(x, y)) = (X{=}x) \cap (Y{=}y).$$

13. Définition. La loi de (X, Y) est la *loi conjointe* du couple. Les lois de X et de Y sont les *lois marginales* du couple.

14. Définition. Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $P(Y = y) \neq 0$, la *loi conditionnelle de X sachant* $(Y = y)$ est définie pour tout $x \in X(\Omega)$ par

$$P(X = x \,|\, Y = y) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(Y = y)}.$$

De même, on définit la loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$ si $P(X = x) \neq 0$.

15. Théorème. Pour tout $x \in X(\Omega)$,

$$P(X = x) = \sum_{y \in Y(\Omega)} P(X = x \,|\, Y = y)\, P(Y = y).$$

De même, on exprime la loi marginale de Y à l'aide des lois conditionnelles de Y sachant les $(X = x)$.

Indépendance

16. Définition. X et Y sont *indépendantes* si pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,

$$P(X = x, Y = y) = P(X = x)\, P(Y = y).$$

On note alors $X \perp\!\!\!\perp Y$.

17. Théorème. $X \perp\!\!\!\perp Y$ si et seulement si pour tous $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$,

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)\, P(Y \in B).$$

18. Théorème. Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors pour toutes fonctions f et g, $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$.

19. Définitions. Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille au plus dénombrable de variables aléatoires discrètes.

Les X_i sont *indépendantes* si pour tout sous-ensemble *fini* $J \subset I$ et tout $(x_j)_{j \in J} \in \prod_{j \in J} X_j(\Omega)$,

$$P\Big(\bigcap_{j \in J} (X_j = x_j)\Big) = \prod_{j \in J} P(X_j = x_j).$$

Les X_i sont *identiquement distribuées* si elles ont toutes la même loi.

Si $I = \mathbb{N}$ et que les X_i sont indépendantes et identiquement distribuées, on parle de suite *i.i.d.*

20. Lemme des coalitions. Si des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors pour tout $m \in [\![1, n-1]\!]$ et toutes fonctions f et g, $f(X_1, \ldots, X_m) \perp\!\!\!\perp g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$.

Espérance

21. DÉFINITION. Si X est à valeurs dans $[0,+\infty]$, l'*espérance* de X est
$$E(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\,P(X=x),$$
en convenant que $x\,P(X=x)=0$ si $x=+\infty$ et $P(X=x)=0$.

22. DÉFINITION. Si X est réelle ou complexe, X *est d'espérance finie* si la famille $\big(x\,P(X=x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, l'*espérance de X* est
$$E(X) = \sum_{x\in X(\Omega)} x\,P(X=x).$$

23. DÉFINITION. X est *centrée* si $E(X)=0$.

24. THÉORÈME. Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$,
$$E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X\geqslant k).$$

25. THÉORÈME DU TRANSFERT. Pour toute fonction f, $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\big(f(x)\,P(X=x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas,
$$E(f(X)) = \sum_{x\in X(\Omega)} f(x)\,P(X=x).$$

26. CONTEXTE. Supposons X et Y d'espérance finie.

27. THÉORÈME. Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors XY est d'espérance finie et $E(XY)=E(X)\,E(Y)$.

28. THÉORÈME. L'espérance est linéaire : pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$, $\alpha X+\beta Y$ est d'espérance finie et
$$E(\alpha X+\beta Y) = \alpha E(X)+\beta E(Y).$$

29. THÉORÈME. L'espérance est positive : si X est réelle et positive, alors $E(X)\geqslant 0$.

30. THÉORÈME. Si X est réelle, positive et centrée, alors $(X=0)$ est presque sûr.

31. THÉORÈME. L'espérance est croissante : si X et Y sont réelles et que $X\leqslant Y$, alors $E(X)\leqslant E(Y)$.

Variance et covariance

32. CONTEXTE. Supposons X et Y réelles telles que X^2 et Y^2 sont d'espérance finie.

33. THÉORÈME. X, Y, XY et $(X+Y)^2$ sont d'espérance finie.

34. DÉFINITIONS.
La *variance de X* est $V(X) = E\big((X-E(X))^2\big)$.
L'*écart type de X* est $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$.

35. DÉFINITION. X est *réduite* si $V(X)=1$.

36. DÉFINITION. La *covariance du couple* (X,Y) est
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\big((X-E(X))\,(Y-E(Y))\big).$$

37. THÉORÈME DE KÖNIG-HUYGENS.
$$V(X) = E(X^2)-E(X)^2,$$
$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY)-E(X)\,E(Y).$$

38. THÉORÈME. Pour tout $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, $(aX+b)^2$ est d'espérance finie et $V(aX+b)=a^2\,V(X)$.

39. THÉORÈME.
$$V(X+Y) = V(X)+V(Y)+2\,\mathrm{Cov}(X,Y).$$

40. THÉORÈME. Si $X\perp\!\!\!\perp Y$, alors $\mathrm{Cov}(X,Y)=0$ et $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$.

Inégalités

41. INÉGALITÉ DE CAUCHY-SCHWARZ.
$$E(XY)^2 \leqslant E(X^2)\,E(Y^2).$$

Il y a égalité si et seulement s'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2$ tel que $(\alpha X+\beta Y=0)$ soit presque sûr.

42. INÉGALITÉ DE MARKOV. Si $X\geqslant 0$,
$$\forall a>0,\ P(X\geqslant a)\leqslant \frac{E(X)}{a}.$$

43. INÉGALITÉ DE BIENAYMÉ-TCHEBYCHEV.
$$\forall b>0,\ P(|X-E(X)|\geqslant b)\leqslant \frac{V(X)}{b^2}.$$

44. LOI FAIBLE DES GRANDS NOMBRES. Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite i.i.d. telle que X_1^2 soit d'espérance finie. Notons $m=E(X_1)$, $\sigma=\sigma(X_1)$ et pour tout $n\geqslant 1$, $S_n=\sum_{k=1}^n X_k$. Alors,
$$\forall\varepsilon>0, \forall n\in\mathbb{N}^*,\ P\Big(\Big|\frac{S_n}{n}-m\Big|\geqslant\varepsilon\Big)\leqslant\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}.$$
En conséquence,
$$\forall\varepsilon>0,\ \lim_{n\to+\infty} P\Big(\Big|\frac{S_n}{n}-m\Big|\geqslant\varepsilon\Big)=0.$$

Fonctions génératrices

45. CONTEXTE. Supposons X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$.

46. DÉFINITION. La *fonction génératrice de X* est
$$G_X : t\mapsto G_X(t)=E(t^X)=\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)\,t^n.$$

47. THÉORÈME. Le rayon de convergence de cette série entière est au moins égal à 1, et G_X est définie au moins sur $[-1,1]$.

48. THÉORÈME. La loi de X est caractérisée par sa fonction génératrice G_X.

49. THÉORÈME. X admet une espérance si et seulement si G_X est dérivable en 1, et dans ce cas, $E(X)=G'_X(1)$.

50. THÉORÈME. Si $X\perp\!\!\!\perp Y$, alors pour tout $t\in[-1,1]$,
$$G_{X+Y}(t)=G_X(t)\,G_Y(t),$$
en notant G_Y et G_{X+Y} les fonctions génératrices de Y et $X+Y$ respectivement.