Premier devoir à la maison

[E3A19]

L'usage de calculatrices est interdit.

- 1. Question de cours : Rappeler sans démonstration pour quelles valeurs du réel α la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^{\alpha}}$ est convergente.
- **2.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
 - **2.1.** On pose pour tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$s_p = \sum_{k=0}^p \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p}.$$

Vérifier que la suite $(s_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et divergente.

2.2. Montrer qu'il existe au moins un entier naturel p tel que l'on ait :

$$\sum_{k=0}^{p} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+p} > 1.$$

On note alors $a_n = n + p_n$ où p_n est le plus petit entier p vérifiant cette propriété et on pose :

$$u_n = \frac{a_n}{n}.$$

On a donc:

$$\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{a_n} > 1.$$

- **3.** La suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle convergente?
- **4.** Prouver pour $n \ge 2$ que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n-1} < 1$$
 et
$$\sum_{k=0}^{2n-2} \frac{1}{n+k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{3n-2} > 1.$$

- **5.** Montrer que si la suite (u_n) converge vers une limite ℓ , alors $\ell \in [2,3]$.
- **6.** Prouver que l'on a, pour tout entier naturel non nul n:

$$1 < \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{a_n} \le 1 + \frac{1}{a_n}.$$

7. Démontrer que l'on a, pour tout entier naturel non nul n :

$$1 - \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{a_n}$$
$$\leqslant \int_{n}^{a_n} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leqslant \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{a_n - 1} \leqslant 1.$$

8. En déduire que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.