Douzième devoir à la maison

Premier exercice
Transformée de Laplace de la fonction sinus cardinal

[CCINP20]

Pour $x > 0$, on note :

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-tx}\,\mathrm{d}t,$$
$$G(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\sin(t)\,\mathrm{d}t,$$
$$H(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos(t)\,\mathrm{d}t.$$

Q1. Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}^+,\ |\sin(t)| \leqslant t$.

Q2. Montrer que les fonctions F, G et H sont bien définies sur $]0, +\infty[$.

Q3. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = 0$.

Q4. Montrer que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et exprimer F' à l'aide de la fonction G.

Q5. Trouver une expression simple pour G et pour H.
On pourra calculer $H(x) + i\,G(x)$.
En déduire, pour $\alpha \in \,]0, +\infty[$, la valeur de

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx}\cos(\alpha t)\,\mathrm{d}t.$$

Q6. En déduire une expression simple pour F. Que vaut $F(1)$?

Second exercice
Faire le bon pari

[Agro13]

On dispose d'une pièce faussée et de deux dés équilibrés. La probabilité d'obtenir pile avec la pièce est de $\frac{1}{3}$. Les deux dés ont chacun 6 faces : le premier a 4 faces rouges et 2 blanches, le second a 2 faces rouges et 4 blanches.

L'expérience est la suivante :

— on commence par lancer la pièce ;
— si l'on obtient pile, on choisit le premier dé, sinon l'on choisit le second dé, et ce choix est définitif pour la suite de l'expérience ;
— ensuite, on lance plusieurs fois le dé choisi et à chaque lancer, l'on note la couleur obtenue.

On considère les évènements suivants :

— D_1 : « on joue avec le premier dé » ;
— D_2 : « on joue avec le second dé » ;
— et pour tout entier naturel n non nul, R_n : « on obtient la couleur rouge au n^{e} lancer du dé choisi ».

Q7. Donner les valeurs des probabilités

$$P(D_1) \text{ et } P(D_2).$$

Montrer que (D_1, D_2) forme un système complet d'évènements.

Q8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner les valeurs de

$$P(R_n \,|\, D_1) \text{ et } P(R_n \,|\, D_2).$$

Q9. Calculer $P(R_1)$.

Q10. Établir un lien entre

$$P(R_1 \,|\, D_1),\ P(R_2 \,|\, D_1) \text{ et } P(R_1 \cap R_2 \,|\, D_1).$$

En déduire la valeur de $P(R_1 \cap R_2)$. Qu'en dire ?

Q11. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} R_i\right) = \frac{2^n + 2}{3^{n+1}}.$$

En déduire la valeur de

$$P\left(R_{n+1} \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{n} R_i\right).$$

Q12. Calculer $P(D_1 | R_1 \cap R_2)$, et de manière générale, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$P\left(D_1 \,\middle|\, \bigcap_{i=1}^{n} R_i\right) = \frac{2^n}{2^n + 2}.$$

Q13. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Après n lancers ayant tous produit une face rouge, vaut-il mieux parier sur le fait qu'on lance le premier dé, ou sur le fait d'avoir à nouveau une face rouge au prochain lancer ?