Treizième devoir à la maison

[E3A18]

On désigne par $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls. Pour tous k, n dans $\mathbb{N}^*$, on note

$$S_k(n) = \sum_{i=1}^{n} i^k.$$

On pourra utiliser le fait que :

$$S_2(n) = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6}.$$

1. Soit k dans $\mathbb{N}^*$. Justifier que la suite $\left(\frac{1}{n^{k+1}}\,S_k(n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\frac{1}{k+1}$.

Si X est une variable aléatoire à valeurs dans une partie finie de $\mathbb{N}$, on note $\mathbf{E}(X)$ son espérance et $\mathbf{V}(X)$ sa variance. Soit N un entier naturel supérieur ou égal à 2.

2. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, N]\!]$. Démontrer que

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i=1}^{N} P(X \geqslant i).$$

On dispose d'une boite dans laquelle sont placés des jetons indiscernables au toucher numérotés de 1 à N. Soit k un entier naturel $\geqslant 2$. On tire k fois de suite un jeton dans cette boite. On note son numéro et on le remet dans la boite. Les tirages sont indépendants les uns des autres. On note X_i la variable aléatoire qui prend comme valeur le numéro du jeton du i-ème tirage, pour i dans $[\![1, N]\!]$. On suppose que la loi de X_i est uniforme sur $[\![1, N]\!]$. On note U_k et V_k les variables aléatoires :

$$U_k = \min(X_1, \ldots, X_k) \text{ et } V_k = \max(X_1, \ldots, X_k).$$

3. Exprimer $\mathbf{E}(X_1)$, $\mathbf{E}(X_1^2)$ et $\mathbf{V}(X_1)$ en fonction de N.

4. On se propose de simuler en Python les variables V_k pour $N = 10$.

(a) Écrire une fonction `simulX` qui renvoie une liste de longueur 100 de réalisations des variables $X_1, \ldots, X_{100}$. On pourra utiliser la fonction : `random.randint`.

L'instruction `random.randint(1,10)` fournit un nombre entier aléatoire dans $[\![1, 10]\!]$ uniformément.

(b) En déduire une fonction `REALIV` qui renvoie une liste de longueur 100 de réalisations des variables $V_1, \ldots, V_{100}$.

5. Soit k dans $\mathbb{N}^*$ supérieur à 2.

(a) Soit $i \in [\![1, N]\!]$. Justifier que :

$$P(U_k \geqslant i) = \left(\frac{N-i+1}{N}\right)^k.$$

(b) On appelle plusieurs fois la fonction `REALIV` de la question 4b. On constate qu'à chaque fois, le résultat obtenu est une liste qui se termine par un grand nombre de 10. Justifier mathématiquement ce résultat.

(c) Exprimer $\mathbf{E}(U_k)$ en fonction de N à l'aide de la fonction S_k introduite au début de l'exercice. Donner un équivalent de $\mathbf{E}(U_k)$ lorsque N tend vers $+\infty$.

6. **(a)** On introduit les variables $Y_i = N+1-X_i$, pour i dans $[\![1, N]\!]$. Justifier que les variables $(Y_1, \ldots, Y_n)$ sont indépendantes et de même loi. Préciser cette loi.

(b) En déduire $\mathbf{E}(V_k)$ et $\mathbf{V}(V_k)$ en fonction de $\mathbf{E}(U_k)$ et $\mathbf{V}(U_k)$.

7. On considère le couple de variables aléatoires (U_2, V_2).

(a) Exprimer $U_2 + V_2$ et $U_2\,V_2$ en fonction de X_1 et X_2.

(b) En déduire $\mathbf{V}(U_2+V_2)$ et $\mathbf{E}(U_2\,V_2)$ en fonction de N.

On peut déduire par un calcul la covariance de U_2 et V_2, notée $\mathrm{Cov}(U_2, V_2)$. On admet sa valeur :

$$\mathrm{Cov}(U_2, V_2) = \frac{(N^2-1)^2}{36\,N^2}.$$

(c) Exprimer $\mathbf{V}(U_2)$ et $\mathbf{V}(V_2)$ en fonction de N.

8. **(a)** Si X est une variable aléatoire à valeurs dans une partie finie de $\mathbb{N}$, démontrer que

$$\mathbf{E}(X^2) = \sum_{i=1}^{N} (2\,i-1)\,P(X \geqslant i).$$

(b) Exprimer $\mathbf{E}(U_k^2)$ en fonction de N à l'aide des fonctions S_k et S_{k+1} introduites au début de l'exercice.

(c) Exprimer $\mathbf{V}(U_k)$ en fonction de N à l'aide des fonctions S_k et S_{k+1} introduites au début de l'exercice.

(d) Donner un équivalent de $\mathbf{V}(U_k)$ lorsque N tend vers $+\infty$.