Quatorzième devoir à la maison

[CCP15]

Le but de l'exercice est de montrer par une approche probabiliste qu'il existe $\ell \in [0,1[$ tel que

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \ell.$$

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et mutuellement indépendantes. On rappelle que dans ce cas, pour tout $n \geqslant 2$, $X_1 + \cdots + X_n$ et X_{n+1} sont indépendantes.

On suppose de plus que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, X_n suit la loi de Poisson de paramètre 1.

On rappelle que si X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et qui suit une loi de Poisson de paramètre λ, alors $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(X_n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \text{ et } S_n^* = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}.$$

1.

1.a. Montrer que S_n suit une loi de Poisson de paramètre n et en déduire son espérance et sa variance.

1.b. Déterminer l'espérance et la variance de S_n^*.

1.c. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(S_n^* \leqslant 0) = e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}.$$

2. Soit $r \in \mathbb{N}$, I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $(a,b) \in I^2$. On rappelle que si f est une fonction de classe $\mathscr{C}^{r+1}$ sur I, alors on a :

$$f(b) = \sum_{k=0}^{r} f^{(k)}(a) \frac{(b-a)^k}{k!} + \int_a^b f^{(r+1)}(t) \frac{(b-t)^r}{r!} \,\mathrm{d}t.$$

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$e^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} + \int_0^n \frac{e^{n-t} \cdot t^n}{n!} \,\mathrm{d}t.$$

3.

3.a. Montrer que :

$$\mathbf{P}(S_n^* \leqslant 0) = \frac{1}{n!} \int_n^{+\infty} e^{-t} t^n \,\mathrm{d}t.$$

3.b. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(S_n^* \leqslant 0) - \mathbf{P}(S_{n+1}^* \leqslant 0) = \int_n^{n+1} e^{-t} \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \,\mathrm{d}t - e^{-n} \frac{n^{n+1}}{(n+1)!}.$$

3.c. En déduire que la suite $(\mathbf{P}(S_n^* \leqslant 0))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante qui converge vers une limite $\ell \in [0,1[$.

3.d. Proposer une méthode numérique et une méthode probabiliste pour conjecturer la valeur de ℓ. Quels sont les avantages et les inconvénients respectifs de ces deux méthodes ?

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbf{G}_{S_n}$ la série génératrice de S_n. On rappelle que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathbf{G}_{S_n}(t) = \mathbf{E}(t^{S_n}) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbf{P}(S_n = k) t^k.$$

4.a. Donner, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, une expression simple de $\mathbf{G}_{S_n}(t)$.

4.b. Vérifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $t^{S_n^*}$ admet une espérance, notée $\mathbf{E}(t^{S_n^*})$, et que :

$$\mathbf{E}(t^{S_n^*}) = \frac{\mathbf{G}_{S_n}(t^{1/\sqrt{n}})}{t^{\sqrt{n}}}.$$

4.c. Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\lim\limits_{n\to+\infty} (\mathbf{E}(t^{S_n^*}))$.