

Quinzième devoir à la maison

Résolution d'une équation fonctionnelle

[CCINP21]

Dans cet exercice, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les relations :

$$(P) \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \\ \forall x \in]0, +\infty[, f(x+1) + f(x) = \frac{1}{x^2}. \end{cases}$$

Partie I – Existence et unicité de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on démontre que le problème (P) admet une unique solution et on détermine une expression de celle-ci sous la forme d'une série de fonctions.

I.1 - Existence de la solution

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $\varphi_k :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \varphi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

Q1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} \varphi_k$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Dans tout le reste de cet exercice, on note $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la somme de la série $\sum_{k \geq 0} \varphi_k$.

Q2. Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, on a

$$\varphi(x+1) + \varphi(x) = \frac{1}{x^2}.$$

Q3. En utilisant le théorème spécial des séries alternées, montrer que :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x) \right| \leq \frac{1}{(x+n+1)^2}.$$

Q4. Montrer que la fonction φ est une solution de (P).

I.2 - Unicité de la solution

Q5. Montrer que si $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est une solution de (P), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

Q6. En déduire que la fonction φ est l'unique solution de (P).

Partie II – Étude de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de l'unique solution $\varphi :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ du problème (P).

Q7. Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{k \geq 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $[\varepsilon, +\infty[$.

Q8. Montrer que la fonction φ est continue sur $]0, +\infty[$. En utilisant le fait que φ est une solution du problème (P), en déduire un équivalent simple de φ au voisinage de 0^+ .

Q9. Justifier que la fonction φ est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que l'on a :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$

Q10. En déduire que la fonction φ est décroissante sur $]0, +\infty[$.

Q11. En utilisant le résultat de la question précédente et la relation (P), montrer que :

$$\forall x \in]1, +\infty[, \frac{1}{x^2} \leq 2\varphi(x) \leq \frac{1}{(x-1)^2}.$$

En déduire un équivalent de φ en $+\infty$.

Partie III – Expression intégrale de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on détermine une expression de φ sous la forme d'une intégrale. On considère un élément $x \in]0, +\infty[$.

Q12. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction $t \mapsto t^{x+k-1} \ln(t)$ est intégrable sur $]0, 1]$ et que l'on a :

$$\int_0^1 t^{x+k-1} \ln(t) dt = -\frac{1}{(x+k)^2}.$$

Q13. En déduire que la fonction $t \mapsto \frac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t}$ est intégrable sur $]0, 1]$ et que :

$$\varphi(x) = -\int_0^1 \frac{t^{x-1} \ln(t)}{1+t} dt.$$