Seizième devoir à la maison

[E3A08]

Durée 3 h
L'usage de la calculatrice est interdit.

Questions de cours

Question 1.

Les assertions suivantes, dans lesquelles $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ désignent deux séries numériques réelles, sont-elles vraies, ou fausses ? En cas de réponse affirmative, vous démontrerez le résultat, et en cas de réponse négative, vous donnerez un contre exemple.

1. (u_n) converge vers 0 $\Longrightarrow \sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge.

2. $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge $\Longrightarrow (u_n)$ converge vers 0.

3. $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Longrightarrow \sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sont de même nature.

4. $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge $\Longrightarrow \sum_{n\geqslant 0} |u_n|$ converge.

Question 2.

Étudier la convergence de la série

$$\sum_{n\geqslant 2} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$$

Préliminaires

Soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle qui converge vers 0. Soit $\varepsilon > 0$: il existe donc $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n > N \Longrightarrow |t_n| \leqslant \varepsilon.$$

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \dfrac{1}{n+1}\displaystyle\sum_{k=0}^{n} t_k$.

1. On écrit alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n > N$,

$$T_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N} t_k + \frac{1}{n+1}\sum_{k=N+1}^{n} t_k.$$

1.1. Prouver que $\left|\displaystyle\sum_{k=N+1}^{n} t_k\right| \leqslant n\varepsilon$.

1.2. En déduire que la suite (T_n) converge vers 0.

2. Prouver alors le cas général :
« si (t_n) tend vers T alors (T_n) tend aussi vers T ».
On pourra par exemple utiliser la suite (v_n) définie par : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = t_n - T$.

3. On prend dans cette question :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ t_n = \cos(n\theta),\ \theta \in \,]0, 2\pi[,\ \text{fixé}.$$

3.1. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ T_n = \frac{1}{n+1}\cos\big(n\tfrac{\theta}{2}\big)\frac{\sin\big((n+1)\frac{\theta}{2}\big)}{\sin\big(\frac{\theta}{2}\big)}.$$

3.2. La suite (T_n) converge-t-elle ?

3.3. On prend ici $\theta = \dfrac{\pi}{3}$. La suite (t_n) converge-t-elle ?

3.4. Conclure.

Partie 1

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle que :

$$(i) \qquad \lim_{n\to+\infty} n\, a_n = 0.$$

1. Montrer qu'il existe un réel K tel que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ |a_n| \leqslant \frac{K}{n}.$$

2. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 0} a_n\, x^n$ converge absolument pour tout $x \in [0, 1[$.
On note alors $f(x)$ sa somme :

$$\forall x \in [0,1[,\ f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n.$$

Désormais, on suppose $\boxed{\text{de plus}}$ que :

$$(ii) \qquad \lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n\right) = L \in \mathbb{R}.$$

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = L - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$.
Prouver que l'on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1[,$$

$$u_n = L - f(x) + \sum_{k=0}^{n} a_k\,(x^k - 1) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k\, x^k.$$

4.1. Justifier l'existence, pour tout entier naturel n, de $M_n = \sup\limits_{k\geqslant n}\big(|k\, a_k|\big)$.

4.2. Prouver que la suite (M_n) converge. Quelle est sa limite ?

5. Déduire de ce qui précède que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1[,$$

$$|u_n| \leqslant |L - f(x)| + \sum_{k=0}^{n} |a_k|\,(1 - x^k) + \frac{M_n}{n\,(1-x)},$$

puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1[,$$

$$|u_n| \leqslant |L - f(x)| + (1-x)\sum_{k=0}^{n} k\,|a_k| + \frac{M_n}{n\,(1-x)}.$$

6. On prend : $x = 1 - \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$.

En utilisant tout ce qui précède, y compris les préliminaires, prouver alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 0$.

7. Conclure en énonçant clairement le résultat obtenu concernant la fonction f.

Partie 2

Soit l'équation différentielle

$$(E) \qquad 4x^2 y''(x) + 4x y'(x) - y = \frac{x}{1-x}.$$

1. Sur quels intervalles peut-on résoudre (E) ?

2. On note $I =]0,1[$. Quelle est la structure de l'ensemble des solutions de (E) sur I ?

3. Développer en série entière autour de l'origine les fonctions

$$\frac{1}{1-x} \text{ et } \frac{1}{1+x}.$$

Donner les domaines de convergence des séries obtenues.

4. Trouver une solution développable en série entière autour de l'origine de (E). Donner le rayon de convergence de la série entière obtenue.

5. Soit $\varphi : x \in I \mapsto \varphi(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2 - 1}$.

5.1. Déterminer les constantes α et β telles que

$$\forall n \geqslant 1,\ \frac{1}{4n^2-1} = \frac{\alpha}{2n-1} + \frac{\beta}{2n+1}.$$

5.2. Soient pour $x \in I$ et $u \in I$,

$$H(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} \text{ et } h(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n+1}}{2n+1}.$$

Montrer que $h(u) = \ln \sqrt{\dfrac{1+u}{1-u}}$.

5.3. En déduire une expression simple de $H(x)$.
On pourra poser $u = \sqrt{x}$.

5.4. En déduire une expression de $\varphi(x)$ à l'aide des fonctions usuelles.

5.5. Calculer la valeur de $L = \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} \varphi(x)$.

6. Soit pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{1}{4n^2 - 1}$.

6.1. Vérifier que la suite (a_n) satisfait les hypothèses (i) et (ii) de la partie 1.

6.2. À l'aide des résultats précédents, calculer la valeur de

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

7. On se propose dans cette question de retrouver la valeur de S directement.

Soit $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2 - 1}$.

Prouver que $S_n = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{2n+1}\right)$.

Conclure.

Partie 3

Soit $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels telle que la série entière $\sum_{n \geqslant 0} c_n x^n$ a pour rayon de convergence 1. On note alors, pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$$

et l'on suppose que $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} h(x) = H \in \mathbb{R}$.

1. La série $\sum_{n \geqslant 0} c_n$ est-elle toujours convergente ? On pourra utiliser des résultats établis dans la partie précédente.

2. On suppose de plus, et dans cette question uniquement, que : $\forall n \in \mathbb{N},\ c_n \geqslant 0$. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 0} c_n$ converge et que l'on a

$$\lim_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n.$$

3. On revient au cas général. En utilisant un résultat établi dans l'une des parties précédentes, quelle condition suffit-il de rajouter concernant la suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour que la série $\sum_{n \geqslant 0} c_n$ converge ?

Fin du problème.