Corrigé du seizième devoir à la maison

Questions de cours. *Naturellement*, je renvoie au cours pour les preuves et les contre-exemples :-).

C.1.1. Bien-sûr que non!

C.1.2. Oui.

C.1.3. Non, il manque cruellement l'hypothèse de la positivité des termes.

C.1.4. Toujours non, c'est la notion de série semi-convergente.

C.2. La suite $(\ln n/n)$ converge vers 0. De plus, elle décroit à partir du rang 3, comme le prouve une rapide étude de la fonction $x \mapsto \ln x/x$. Donc d'après le critère spécial des séries alternées,

$$\sum_{n\geqslant 2}(-1)^n \frac{\ln n}{n} \text{ converge.}$$

P.1.1. Pour tout $k > N$, $|t_k| \leqslant \varepsilon$, donc

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=N+1}^{n} t_k\right| &\leqslant \sum_{k=N+1}^{n} |t_k| \leqslant \sum_{k=N+1}^{n} \varepsilon \\ &= (n-(N+1)+1)\varepsilon \\ &= (n-N)\varepsilon \leqslant n\varepsilon.\end{aligned}$$

P.1.2. L'entier N étant fixé, la somme $\sum_{k=0}^{N} t_k$ est constante, donc la suite

$$\left(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N} t_k\right)_{n>N}$$

tend vers 0. Alors, il existe un entier $P > N$ tel que pour tout $n > P$,

$$\frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{N} t_k\right| \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi, pour tout entier $n > P$, $n > N$, donc

$$\begin{aligned}|T_n| &= \left|\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N} t_k + \frac{1}{n+1}\sum_{k=N+1}^{n} t_k\right| \\ &\leqslant \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=0}^{N} t_k\right| + \frac{1}{n+1}\left|\sum_{k=N+1}^{n} t_k\right| \\ &\leqslant \varepsilon + \frac{1}{n+1} n\varepsilon \leqslant 2\varepsilon.\end{aligned}$$

On vient de prouver que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists P \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n > P \Longrightarrow |T_n| \leqslant 2\varepsilon,$$

ce qui signife que (T_n) tend vers 0.

P.2. Soit une suite (t_n) tendant vers T. Alors la suite (v_n) tend vers 0, où $v_n = t_n - T$. D'après la question précédente, la suite (V_n) tend vers 0, où

$$\begin{aligned}V_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} v_k = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(t_k - T) \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} t_k - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} T = T_n - T.\end{aligned}$$

Finalement, si (t_n) tend T, (T_n) aussi.

Commentaire. On vient de démontrer le théorème dit de Cesàro.

P.3.1. C'est un calcul classique. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right).$$

Or $e^{i\theta} \neq 1$ car $\theta \in \,]0, 2\pi[$, donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta} &= \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}} \\ &= \frac{e^{i(n+1)\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i(n+1)\frac{\theta}{2}} - e^{i(n+1)\frac{\theta}{2}}\right)}{e^{i\frac{\theta}{2}}\left(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}}\right)} \\ &= e^{in\frac{\theta}{2}} \frac{-2i\sin((n+1)\frac{\theta}{2})}{-2i\sin(\frac{\theta}{2})}.\end{aligned}$$

Alors
$$\begin{aligned}T_n &= \frac{1}{n+1}\mathrm{Re}\left(e^{in\frac{\theta}{2}}\frac{\sin((n+1)\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}\right) \\ &= \frac{1}{n+1}\cos(n\tfrac{\theta}{2})\frac{\sin((n+1)\frac{\theta}{2})}{\sin(\frac{\theta}{2})}.\end{aligned}$$

P.3.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}|T_n| &= \frac{1}{n+1}|\cos(n\tfrac{\theta}{2})|\frac{|\sin((n+1)\frac{\theta}{2})|}{|\sin(\frac{\theta}{2})|} \\ &\leqslant \frac{1}{n+1}\frac{1}{|\sin(\frac{\theta}{2})|}\end{aligned}$$

donc (T_n) tend vers 0.

P.3.3. Pour $\theta = \frac{\pi}{3}$ et $p \in \mathbb{N}$, $t_{3p} = \cos(p\pi) = (-1)^p$. Ainsi, la suite $(t_{3p})_{p\in\mathbb{N}}$ diverge. Autrement dit, la suite (t_n) admet une suite extraite qui diverge,

donc (t_n) diverge.

P.3.4. Il s'ensuit que la réciproque du théorème de la question P.2 est fausse.

1.1. La suite $(n\,a_n)$ est bornée car elle converge :

$\exists K \geqslant 0, \forall n \in \mathbb{N}^*,\ |n\,a_n| \leqslant K.$

L'hypothèse (i) signifie que $a_n = \mathrm{o}(\frac{1}{n})$, et l'on vient d'en déduire que $a_n = \mathrm{O}(\frac{1}{n})$.

1.2. Soit $x \in [0,1[$. On a

$$|a_n\,x^n| = |a_n|\,x^n \leqslant n\,|a_n|\,x^n \leqslant K\,x^n.$$

Or la série $\sum x^n$ converge, comme série géométrique de raison $x \in [0,1[$. Alors, par comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum|a_n\,x^n|$ converge, donc

pour $x \in [0,1[$, la série $\sum a_n\,x^n$ converge absolument.

1.3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$. Selon un principe classique, on introduit dans u_n des termes intermédiaires, ici $\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, x^k$ et $\sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k$:

$$\begin{aligned} u_n &= L - \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, x^k + \sum_{k=0}^{+\infty} a_k\, x^k \\ &\quad - \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k + \sum_{k=0}^{n} a_k\, x^k - \sum_{k=0}^{n} a_k \\ &= L - f(x) + \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k\, x^k + \sum_{k=0}^{n} a_k\,(x^k - 1). \end{aligned}$$

1.4.1. Soit $n \in \mathbb{N}$. La suite $(k a_k)_{k \geqslant 0}$ est bornée, donc aussi la suite $(k\, a_k)_{k \geqslant n}$. Alors la borne supérieure $M_n = \sup_{k \geqslant n}(|k\, a_k|)$ existe.

1.4.2. Soit $\varepsilon > 0$.

La suite $(k\, a_k)_{k \geqslant 0}$ converge vers 0 donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant N$, $|k\, a_k| \leqslant \varepsilon$.

Soit $n \geqslant N$. Pour tout $k \geqslant n$, $k \geqslant N$ donc $|k\, a_k| \leqslant \varepsilon$. Alors ε est un majorant de la suite $(|k\, a_k|)_{k \geqslant n}$, donc $M_n \leqslant \varepsilon$, car M_n est le plus petit des majorants de cette suite.

On vient de prouver que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant N \Longrightarrow M_n \leqslant \varepsilon,$$

c'est-à-dire que (M_n) converge vers 0.

1.5. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1[$. On a

$$|u_n| \leqslant |L - f(x)| + \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\,(x^k - 1)\right| + \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k\, x^k\right|.$$

D'une part,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} a_k\,(x^k - 1)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k\,(x^k - 1)| = \sum_{k=0}^{n} |a_k|\,(1 - x^k).$$

On a $1 - x^0 = 0$ et pour $k \in [\![1, n]\!]$, comme $x < 1$,

$$1 - x^k = (1 - x) \sum_{j=0}^{k-1} x^j \leqslant (1 - x) \sum_{j=0}^{k-1} 1 = (1 - x)\, k.$$

Alors, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} |a_k|\,(1 - x^k) \leqslant (1 - x) \sum_{k=0}^{n} k\,|a_k|$.

D'autre part,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k\, x^k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} |a_k|\, x^k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} k\,|a_k|\, \frac{x^k}{k}.$$

Mais pour tout $k \geqslant n+1$, $k \geqslant n$ donc $k\,|a_k| \leqslant M_n$ et $\frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{n}$. Alors

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k\, x^k\right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} M_n\, \frac{x^k}{n} = \frac{M_n}{n} \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k.$$

Or, en reconnaissant une somme géométrique de raison x et de premier terme x^{n+1},

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k = \frac{x^{n+1}}{1 - x}.$$

Ainsi, comme $x < 1$,

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k\, x^k\right| \leqslant \frac{M_n}{n}\, \frac{x^{n+1}}{1 - x} \leqslant \frac{M_n}{n\,(1 - x)}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned} |u_n| &\leqslant |L - f(x)| + \sum_{k=0}^{n} |a_k|\,(1 - x^k) + \frac{M_n}{n\,(1 - x)} \\ &\leqslant |L - f(x)| + (1 - x) \sum_{k=0}^{n} k\,|a_k| + \frac{M_n}{n\,(1 - x)}. \end{aligned}$$

1.6. Pour $x = 1 - \frac{1}{n}$, cette majoration devient

$$|u_n| \leqslant \left|L - f\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right| + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} k\,|a_k| + M_n.$$

D'après (ii), $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = L$ donc

$$\lim_{n \to +\infty} f\left(1 - \frac{1}{n}\right) = L$$

$$\text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} \left|L - f\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right| = 0.$$

D'après P.1.2, comme la suite $(k\,|a_k|)$ tend vers 0,

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} k\,|a_k| = \frac{n+1}{n}\, \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} k\,|a_k| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0.$$

Enfin, d'après 1.4.2, la suite (M_n) tend vers 0.

Ainsi, on a majoré $|u_n|$ par le terme général d'une suite qui tend vers 0, donc (u_n) tend vers 0.

1.7. Dire que (u_n) tend vers 0 signifie que la suite $(\sum_{k=0}^{n} a_k)$ converge vers L, ce qui par définition, signifie que la série $\sum a_n$ converge et a pour somme L. Autrement dit, on peut remplacer x par 1 dans la définition de f : f est prolongeable en 1. En vertu de la propriété (ii), la fonction ainsi prolongée est continue en 1.

Finalement, f se prolonge par continuité en 1 en posant $f(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = L$.

2.1. Pour appliquer la théorie du cours, il est nécessaire que les fonctions $x \mapsto 4x^2$, $x \mapsto 4x$, $x \mapsto -1$ et $x \mapsto x/(1-x)$ soient continues sur l'intervalle de résolution, lequel ne peut donc pas contenir 1. En outre, dans le cadre du théorème de Cauchy-Lipschitz, la fonction $x \mapsto 4x^2$ ne doit pas s'annuler, donc l'intervalle de résolution ne peut contenir 0.

Ainsi, on peut résoudre (E) sur tout intervalle ne contenant ni 0, ni 1.

Commentaire. Cela dit, en sortant du cadre du théorème de Cauchy-Lipschitz, il est permis de chercher les solutions de (E) développables en série entière autour de 0, donc sur un intervalle centré en 0, mais qui ne pourrait toujours pas contenir 1.

2.2. D'après le cours,

$\boxed{\text{l'ensemble des solutions de } (E) \text{ sur } I =]0,1[\text{ est un plan affine, dirigé par le plan vectoriel des solutions de l'équation homogène associée.}}$

2.3. D'après le cours, les séries géométriques $\sum x^n$ et $\sum (-1)^n x^n$ convergent si et seulement si $|x| < 1$, et l'on a, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\boxed{\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \text{ et } \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n.}$$

2.4. Raisonnons par analyse-synthèse.

Analyse. Supposons que (E) admette une solution développable en série entière $y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, de rayon de convergence $R > 0$. Sur $]-R,R[$, y est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et pour tout $x \in]-R,R[$,

$$y'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \text{ et } y''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Par ailleurs, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\frac{x}{1-x} = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n.$$

Alors, en posant $r = \min\{1, R\}$, pour tout $x \in]-r,r[$,

$$\begin{aligned}
& 4x^2 y''(x) + 4x y'(x) - y(x) = \frac{x}{1-x} \\
\iff\ & 4x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2} + 4x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} \\
& - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \\
\iff\ & 4 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^n + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n \\
& - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \\
\iff\ & \sum_{n=1}^{+\infty} 4n(n-1) a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} 4n a_n x^n \\
& - \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n - a_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n \\
\iff\ & \sum_{n=1}^{+\infty} (4n^2 - 1) a_n x^n - a_0 = \sum_{n=1}^{+\infty} x^n
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction $x \mapsto x/(1-x)$, $a_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(4n^2 - 1) a_n = 1$ ou encore

$$a_n = \frac{1}{4n^2 - 1}.$$

Synthèse. Considérons la série entière

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{4n^2 - 1}.$$

Comme son coefficient général est une fraction rationnelle en n, le rayon de convergence de cette série entière est le même que celui de la série entière $\sum x^n$, c'est-à-dire 1. Il n'est pas nul et la synthèse est validée.

$\boxed{\text{Ainsi, l'équation } (E) \text{ admet une unique solution développable en série entière, la fonction } x \in]-1,1[\mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{4n^2-1}. \text{ Son rayon de convergence est 1.}}$

2.5.1. Sans difficulté, pour tout $n \geqslant 1$,

$$\boxed{\frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2(2n-1)} - \frac{1}{2(2n+1)}.}$$

2.5.2. La fonction h est somme d'une série entière dont le rayon de convergence est clairement 1. Alors, elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et pour tout $u \in I$,

$$h'(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} u^{2n} = \frac{1}{1-u^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u}\right).$$

Puisque $h(0) = 0$, pour tout $u \in I$,

$$\boxed{h(u) = \frac{1}{2}(-\ln(1-u) + \ln(1+u)) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+u}{1-u}.}$$

2.5.3. Soit $x \in I$. Comme $x > 0$, on peut poser $u = \sqrt{x}$, c'est-à-dire $x = u^2$. On a

$$\begin{aligned}
\boxed{H(x)} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n}}{2n+1} = \frac{1}{u} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u^{2n+1}}{2n+1} = \frac{h(u)}{u} \\
&= \frac{1}{2u} \ln \frac{1+u}{1-u} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}.}
\end{aligned}$$

2.5.4. Soit $x \in I$. On a

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n-1} - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1}.$$

D'une part,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{2n+1} - 1 = H(x) - 1.$$

D'autre part, en translatant l'indice,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{2n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{2n+1} = x H(x).$$

Alors
$$\begin{aligned}
\boxed{\varphi(x)} &= \frac{1}{2}(x-1) H(x) + \frac{1}{2} \\
&= \boxed{\frac{1}{2} + \frac{x-1}{4\sqrt{x}} \ln \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}.}
\end{aligned}$$

2.5.5. Soit $x \in I$. On peut écrire

$$\begin{aligned}
\varphi(x) = \frac{1}{2} &+ \frac{x-1}{4\sqrt{x}} \ln(1+\sqrt{x}) \\
&+ \frac{1+\sqrt{x}}{4\sqrt{x}} (1-\sqrt{x}) \ln(1-\sqrt{x}).
\end{aligned}$$

Or, en posant $y = 1 - \sqrt{x}$,

$$\lim_{x\to 1^-} (1-\sqrt{x}\,)\ln(1-\sqrt{x}\,) = \lim_{y\to 0^+} y\ln y = 0.$$

$\boxed{\text{Donc } \lim_{x\to 1^-} \varphi(x) = \frac{1}{2} = L.}$

2.6.1. Clairement, la suite $(n\,a_n)$ tend vers 0 donc (a_n) vérifie (i). D'après la question précédente, la suite (a_n) vérifie aussi (ii).

2.6.2. D'après la question 1.7, $\sum a_n$ converge et a pour somme $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = L = \frac{1}{2}$.

$\boxed{\text{Alors } S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.}$

2.7. Soit $n \geqslant 1$. D'après la question 2.5.1,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k-1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2k+1} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right). \end{aligned}$$

Où l'on voit clairement que (S_n) converge vers $\frac{1}{2}$, donc $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ converge et a pour somme $\frac{1}{2}$.

$\boxed{\text{On retrouve } S = -\frac{1}{2}.}$

3.1. $\boxed{\text{Non.}}$ En effet, en nous inspirant de la question P.3.3, considérons la suite (c_n) définie par $c_n = (-1)^n$. La série $\sum(-1)^n$ diverge grossièrement. Pourtant, pour tout $x \in \,]-1,1[$,

$$h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\,x^n = \frac{1}{1+x} \xrightarrow[x\to 1^-]{} \frac{1}{2},$$

et la suite (c_n) vérifie les hypothèses requises.

3.2. Comme les c_k sont positifs, pour $x \in [0,1[$,

$$\sum_{k=0}^{n} c_k\,x^k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} c_k\,x^k = h(x).$$

En passant à la limite quand x tend vers 1,

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \leqslant H.$$

Ainsi, les sommes partielles de la série à termes positifs $\sum c_k$ sont majorées, donc $\boxed{\sum c_n \text{ converge.}}$

Soit S sa somme. On a $S \leqslant H$ car H majore les sommes partielles de $\sum c_n$. En outre, comme $x < 1$,

$$h(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k\,x^k \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} c_k = S.$$

En passant toujours à la limite sur x, $H \leqslant S$. Ainsi,

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}} h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n.}$$

3.3. D'après la partie 1, il suffit de rajouter l'hypothèse (i), à savoir que la suite $(n\,c_n)$ tend vers 0.