

Dix-sptième devoir à la maison

[d'après CCP98]
Les calculatrices sont autorisées

NOTATIONS ET OBJECTIFS

Étant donné un intervalle J de \mathbf{R} et une fonction f à valeurs réelles, continue par morceaux et intégrable sur J , on note $\int_J f(x) dx$ l'intégrale de f sur J .

On désigne par

- α un nombre réel ;
- φ_α la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par

$$\varphi_\alpha(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{e^x - 1}$$

lorsque $x > 0$ et $\varphi_\alpha(0) = 0$;

- h la fonction définie sur \mathbf{R}^2 par

$$h(x, t) = \frac{\sin(xt)}{e^x - 1}$$

lorsque $x \neq 0$ et $h(0, t) = t$.

On note

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_{[0, +\infty[} \varphi_\alpha(x) dx, \\ \Gamma(\alpha) &= \int_{]0, +\infty[} e^{-x} x^{\alpha-1} dx, \\ H(t) &= \int_{[0, +\infty[} h(x, t) dx. \end{aligned}$$

Lorsque la série $\sum 1/n^\alpha$ converge, on note

$$\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

L'objet de ce problème est l'étude de la fonction H . La première partie fournit l'expression de $I(\alpha)$ à l'aide des fonctions Γ et ζ . Dans la deuxième partie on étudie la fonction H . La troisième partie exploite les résultats obtenus dans les deux premières parties.

Préliminaires

P.1/ Préciser, sans justification, l'ensemble de définition $D(\zeta)$ de la fonction ζ .

P.2/ Préciser, sans justification, l'ensemble $D(\Gamma)$ des réels α tels que la fonction $x \mapsto e^{-x} x^{\alpha-1}$ soit intégrable sur $]0, +\infty[$.

P.3/ Pour $\alpha - 1 \in D(\Gamma)$, établir la relation

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1) \Gamma(\alpha - 1).$$

P.4/ En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour $n \in \mathbf{N}^*$.

Première partie

Soit $\Delta(\varphi)$ l'ensemble des nombres réels α pour lesquels la fonction φ_α est continue par morceaux sur $[0, +\infty[$.

1.1/ Déterminer l'ensemble $\Delta(\varphi)$.

1.2/ Montrer que φ_α est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour tout $\alpha \in \Delta(\varphi)$.

1.3/ On suppose que $\alpha \in \Delta(\varphi)$.

Soit $u_n(x) = x^{\alpha-1} e^{-nx}$ pour $n \in \mathbf{N}^*$ et $x \in [0, +\infty[$.

1.3.1/ Montrer que la série $\sum u_n(x)$ converge pour tout $x \in [0, +\infty[$ et expliciter sa somme

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$$

1.3.2/ Montrer que la fonction u_n est intégrable sur $[0, +\infty[$ pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

1.3.3/ Exprimer $\int_{[0, +\infty[} u_n(x) dx$ à l'aide de n , α et de la fonction Γ .

1.3.4/ Justifier avec soin l'égalité :

$$\int_{[0, +\infty[} \left[\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \right] dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\int_{[0, +\infty[} u_n(x) dx \right].$$

1.3.5/ En déduire l'expression de $I(\alpha)$ à l'aide de α et des fonctions Γ et ζ .

1.3.6/ Quelle est la limite de $\zeta(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$?

1.3.7/ En déduire un équivalent de $I(k)$ pour $k \in \mathbf{N}$ et k tendant vers $+\infty$.

Deuxième partie

Rappel. La fonction h est définie sur \mathbf{R}^2 par

$$h(x, t) = \frac{\sin(xt)}{e^x - 1} \text{ lorsque } x \neq 0 \text{ et } h(0, t) = t.$$

II A

2.a.1/ Étudier la continuité sur \mathbf{R}^2 de la fonction h .

2.a.2/ Montrer que la fonction $x \mapsto h(x, t)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ quel que soit $t \in \mathbf{R}$.

2.a.3/ Montrer que la fonction H est continue sur \mathbf{R} .

2.a.4/ Montrer que la fonction H est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbf{R} et exprimer sa dérivée n^e sous forme intégrale.

II B

Soit g_n la fonction définie sur \mathbf{R} par $g_n(x) = e^{-nx} \sin(\alpha x)$ pour $n \in \mathbf{N}^*$ et α réel. On désigne par $D(g)$ l'ensemble des nombres réels x tels que la série $\sum g_n(x)$ soit convergente, et pour $x \in D(g)$, on note

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} g_n(x).$$

2.b.1/ Déterminer l'ensemble $D(g)$ lorsque $\alpha = 0$ (resp. lorsque $\alpha \neq 0$).

2.b.2/ Expliciter $g(x)$ pour $x \in D(g)$.

2.b.3/ Montrer que la fonction g_n est intégrable sur $[0, +\infty[$ quel que soit $\alpha \in \mathbf{R}$ et quel que soit $n \in \mathbf{N}^*$.

2.b.4/ Justifier avec soin l'égalité

$$H(\alpha) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left[\int_{[0, +\infty[} g_n(x) dx \right].$$

2.b.5/ Calculer $\int_{[0, +\infty[} g_n(x) dx$ pour $n \in \mathbf{N}^*$ et en déduire la valeur de $H(\alpha)$ sous la forme de la somme d'une série.

On admet que pour $\alpha \in \mathbf{R}^*$,

$$H(\alpha) = \frac{\pi}{2} \frac{\operatorname{ch}(\alpha\pi)}{\operatorname{sh}(\alpha\pi)} - \frac{1}{2\alpha}.$$

Troisième partie

On désigne par t un nombre réel et par ψ_t la fonction définie sur \mathbf{R} par

$$\psi_t(x) = \frac{\operatorname{sh}(tx)}{e^x - 1} \text{ lorsque } x \neq 0 \text{ et } \psi_t(0) = 0.$$

3.1/ Déterminer l'ensemble $\mathcal{I}(\psi)$ des nombres réels t tels que la fonction ψ_t soit intégrable sur $[0, +\infty[$.

3.2/ On suppose que $t \in \mathcal{I}(\psi)$.

3.2.1/ Montrer la convergence de la série entière

$$\sum (-1)^k \zeta(2k+2) t^{2k+1}.$$

3.2.2/ Justifier avec soin l'égalité

$$H(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \zeta(2k+2) t^{2k+1}.$$

3.3/ Quel est le rayon de convergence de la série entière

$$\sum (-1)^k \zeta(2k+2) t^{2k+1} ?$$

3.4/ On pose $a_{2k+1} = (-1)^k \frac{\zeta(2k+2)}{\pi^{2k+2}}$ pour $k \in \mathbf{N}$.

3.4.1/ Montrer que, pour tout x dans un intervalle à préciser, on a l'égalité suivante :

$$(\operatorname{sh} x) \sum_{k=0}^{+\infty} a_{2k+1} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k}{(2k+1)!} x^{2k}.$$

3.4.2/ En déduire la valeur de la somme

$$\sum_{p=0}^k \frac{a_{2p+1}}{(2(k-p)+1)!}$$

puis en déduire que chaque a_{2k+1} est un nombre rationnel.

3.4.3/ Calculer a_5 et $\zeta(6)$.