

Dix-huitième devoir à la maison

Étude d'une série trigonométrique [MP07]

Durée 3 h
L'usage d'ordinateur ou de calculette est interdit.

On rappelle que pour tout réel $x > 0$,

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Par ailleurs, pour tout réel t ,

$$\operatorname{ch} t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}.$$

On pose, pour tout réel x et tout $\alpha \in]0, +\infty[$,

$$(1) \quad S_\alpha(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^\alpha}.$$

L'objectif de ce problème est d'étudier différentes propriétés de cette fonction.

Dans tout le problème, u est un réel de $]−1, 1[$.

I Deux représentations de S_α

1 — Prouver que pour tout $\alpha > 1$, la fonction S_α est continue sur \mathbb{R} .

2 — Étudier, en fonction du paramètre $\gamma \in \mathbb{R}$, l'intégrabilité sur $]0, +\infty[$, de la fonction

$$J : t \mapsto \frac{t^{\gamma-1}}{e^t - u}.$$

Soit $t \geq 0$. On pose,

$$R_N(t, u) = \left(\frac{u}{e^t - u} - u e^{-t} \sum_{n=0}^{N-1} (u e^{-t})^n \right) t^{\alpha-1}.$$

3 — Simplifier l'expression de R_N , en l'écrivant sous forme d'une fraction.

4 — Prouver que pour tout $u \in]−1, 1[$,

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} R_N(t, u) dt = 0.$$

5 — Exprimer, en fonction de $\Gamma(\alpha)$, la constante $K(\alpha) \in \mathbb{R}_+$ telle que pour tout $\alpha > 0$,

$$(2) \quad \int_0^{+\infty} \frac{u t^{\alpha-1}}{e^t - u} dt = K(\alpha) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{u^n}{n^\alpha},$$

pour tout $u \in]−1, 1[$.

6 — On admet que l'identité (2) reste vraie aussi pour $u = e^{ix}$ où $x \in]0, 2\pi[$. En déduire pour $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, l'identité suivante :

$$S_\alpha(x) = \frac{\sin x}{2\Gamma(\alpha)} \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - \cos x} dt.$$

7 — Montrer, pour tout $M > 0$, pour tout $u \in]−1, 1[$, l'égalité suivante :

$$\int_0^M \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - u} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^M u^n \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} dt.$$

8 — Établir, pour tout $u \in]−1, 1[$, l'identité

$$\begin{aligned} \lim_{M \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u^n \int_0^M \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} dt \\ = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} dt. \end{aligned}$$

9 — Pour $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, exprimer $S_\alpha(x)$ en fonction de fonctions trigonométriques et de G_α où

$$G_\alpha(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n u^n \text{ pour } u \in]−1, 1[$$

avec

$$(3) \quad a_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}} dt.$$

II Comportement asymptotique

Soit $B :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que :

$$(4) \quad \int_0^{+\infty} |B(s)| ds < +\infty,$$

$$(5) \quad B(s) \underset{s \rightarrow 0^+}{=} a s^{\lambda-1} (1 + o(1)), \quad a > 0, \quad \lambda > 0.$$

10 — Prouver que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$,

$$\left| \int_0^\delta (B(s) e^{-ns} - a s^{\lambda-1} e^{-ns}) ds \right| < \varepsilon \frac{a}{n^\lambda} \Gamma(\lambda).$$

11 — Prouver que pour tout $\delta > 0$, il existe une constante $C(\delta) > 0$ (que vous exprimerez sous la forme d'une intégrale indépendante de n) telle que pour tout $n > 1$

$$\left| \int_\delta^{+\infty} (B(s) e^{-ns} - a s^{\lambda-1} e^{-ns}) ds \right| \leq C e^{-(n-1)\delta}.$$

12 — Prouver que, sous ces hypothèses,

$$\int_0^{+\infty} B(s) e^{-ns} ds \underset{n \rightarrow +\infty}{=} a \frac{\Gamma(\lambda)}{n^\lambda} (1 + o(1)).$$

13 — Montrer que pour tout entier n , on peut écrire

$$a_n = \int_0^{+\infty} \frac{(\ln(e^s + \sqrt{e^{2s}-1}))^{\alpha-1}}{\sqrt{e^{2s}-1}} e^{-ns} ds,$$

où a_n est défini dans (3).

On pose dorénavant, pour tout $s > 0$,

$$B(s) = \frac{(\ln(e^s + \sqrt{e^{2s}-1}))^{\alpha-1}}{\sqrt{e^{2s}-1}}.$$

14 — Donner un équivalent de la fonction B au voisinage de 0^+ .

15 — Déterminer la limite de $a_n n^{\alpha/2}$ quand n tend vers l'infini.

FIN DU PROBLÈME