Corrigé du dix-huitième devoir à la maison

NOTATION. Comme il n'y a pas d'ambigüité ici, nous noterons $+\infty = \infty$. Notons alors $I =]0, \infty[$.

1. Soit $\alpha > 1$.
○ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\sigma_n : x \mapsto \sin(nx)/n^\alpha$ est continue sur $\mathbb{R}$.
○ En outre, pour $x \in \mathbb{R}$, $|\sigma_n(x)| \leqslant 1/n^\alpha$, où $\sum 1/n^\alpha$ converge car $\alpha > 1$, donc la série de fonctions $\sum \sigma_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}$.

Alors, S_α est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $\gamma \in \mathbb{R}$. La fonction J est clairement définie, positive et continue sur I car pour tout $t > 0$, $e^t > 1 > u$.

De plus, en 0^+, $J(t) \sim t^{\gamma-1}/(1-u)$. Or $t \mapsto t^{\gamma-1}$ est intégrable sur $]0,1]$ si et seulement si $\gamma - 1 > -1$, c'est-à-dire $\gamma > 0$, donc il en est de même pour J.

Enfin, en ∞, $J(t) \sim t^{\gamma-1}\, e^{-t} \ll e^{-t/2}$, où $t \mapsto e^{-t/2}$ est intégrable sur $[1, \infty[$, donc J l'est aussi. Ainsi,

J est intégrable sur I si et seulement si $\gamma > 0$.

3. Comme $t \geqslant 0$ et $|u| < 1$, $e^{-t} \leqslant 1$ et $|u\,e^{-t}| = |u|\,e^{-t} < 1$. Alors, on a

$$\sum_{n=0}^{N-1} (u\,e^{-t})^n = \frac{1-(u\,e^{-t})^N}{1-u\,e^{-t}} = \frac{1-(u\,e^{-t})^N}{e^{-t}\,(e^t-u)},$$

et

$$\begin{aligned} R_N(t,u) &= \left[\frac{u}{e^t-u} - u\,e^{-t}\,\frac{1-(u\,e^{-t})^N}{e^{-t}\,(e^t-u)}\right] t^{\alpha-1} \\ &= \frac{u\,(u\,e^{-t})^N}{e^t-u}\, t^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

4. Utilisons le théorème de convergence dominée.
○ Les fonctions

$$f_N : I \to \mathbb{R}_+,\ t \mapsto \frac{u\,(u\,e^{-t})^N}{e^t-u}\, t^{\alpha-1}$$

sont continues sur I.
○ Soit $t > 0$. Comme $|u\,e^{-t}| < 1$, $\lim_{N\to\infty} f_N(t) = 0$, donc la suite de fonctions $(f_N)_{N\geqslant 0}$ converge simplement sur I vers la fonction nulle.
○ La fonction nulle est continue sur I.
○ Enfin, pour tout $t > 0$, $|f_N(t)| \leqslant J(t)$, en considérant la fonction J de la question 2 avec $\gamma = \alpha > 0$, laquelle est intégrable sur I et constitue donc une domination valide.

Alors
• les fonctions f_N (et la fonction nulle !) sont intégrables sur I,
• et $\displaystyle \lim_{N\to\infty} \int_0^\infty R_N(t,u)\,\mathrm{d}t = 0.$

5. Évaluons directement l'intégrale précédente. On a

$$\begin{aligned} R_N(t,u) &= \frac{u\,t^{\alpha-1}}{e^t-u} - \sum_{n=0}^{N-1} (u\,e^{-t})^{n+1}\, t^{\alpha-1} \\ &= \frac{u\,t^{\alpha-1}}{e^t-u} - \sum_{n=1}^{N} (u\,e^{-t})^{n}\, t^{\alpha-1} \\ &= \frac{u\,t^{\alpha-1}}{e^t-u} - \sum_{n=1}^{N} u^n\, e^{-nt}\, t^{\alpha-1}. \end{aligned}$$

La fonction

$$t \mapsto \frac{u\,t^{\alpha-1}}{e^t-u} = u\,J(t)$$

est continue et intégrable sur I car $\alpha > 0$. La fonction $t \mapsto u^n\, e^{-nt}\, t^{\alpha-1}$ l'est aussi car

$$|u^n\, e^{-nt}\, t^{\alpha-1}| \underset{t\to\infty}{\ll} e^{-t/2},$$
$$|u^n\, e^{-nt}\, t^{\alpha-1}| = |u|^n\, e^{-nt}\, t^{\alpha-1} \underset{t\to 0^+}{\sim} |u|^n\, t^{\alpha-1}.$$

De plus, en posant $x = nt$, qui est un changement de variable bijectif et de classe $\mathscr{C}^1$ de I dans I,

$$\int_0^\infty u^n\, e^{-nt}\, t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t = u^n \int_0^\infty e^{-x}\, \frac{x^{\alpha-1}}{n^{\alpha-1}}\, \frac{\mathrm{d}x}{n} = \Gamma(\alpha)\, \frac{u^n}{n^\alpha}.$$

Alors,

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty R_N(t,u)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \frac{u\,t^{\alpha-1}}{e^t-u}\,\mathrm{d}t - \sum_{n=1}^N \int_0^\infty u^n\, e^{-nt}\, t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^\infty \frac{u\,t^{\alpha-1}}{e^t-u}\,\mathrm{d}t - \Gamma(\alpha) \sum_{n=1}^N \frac{u^n}{n^\alpha}. \end{aligned}$$

Comme $|u^n/n^\alpha| < 1/n^\alpha$ et que $\sum 1/n^\alpha$ converge, $\sum u^n/n^\alpha$ converge absolument. Alors, en passant à la limite sur N,

$$0 = \int_0^\infty \frac{u\,t^{\alpha-1}}{e^t-u}\,\mathrm{d}t - \Gamma(\alpha) \sum_{n=1}^\infty \frac{u^n}{n^\alpha},$$

c'est-à-dire $\displaystyle \int_0^\infty \frac{u\,t^{\alpha-1}}{e^t-u}\,\mathrm{d}t = \Gamma(\alpha) \sum_{n=1}^\infty \frac{u^n}{n^\alpha}.$

6. En l'appliquant à $u = e^{ix}$ pour $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$\int_0^\infty \frac{e^{ix}\, t^{\alpha-1}}{e^t - e^{ix}}\,\mathrm{d}t = \Gamma(\alpha) \sum_{n=1}^\infty \frac{e^{inx}}{n^\alpha}.$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{e^{ix}}{e^t - e^{ix}} &= \frac{e^{ix}\,(e^t - e^{-ix})}{(e^t - e^{ix})\,(e^t - e^{-ix})} \\ &= \frac{e^{ix}\,e^t - 1}{e^{2t} - 2\,e^t \cos x + 1} \\ &= \frac{e^t\,(e^{ix} - e^{-t})}{e^t\,(e^t - 2\cos x + e^{-t})} \\ &= \frac{e^{ix} - e^{-t}}{2\,(\operatorname{ch} t - \cos x)}. \end{aligned}$$

D'où,

$$\boxed{S_\alpha(x) = \operatorname{Im}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{inx}}{n^\alpha}\right) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \operatorname{Im}\left(\frac{(e^{ix} - e^{-t})\,t^{\alpha-1}}{2\,(\operatorname{ch} t - \cos x)}\right) \mathrm{d}t = \frac{\sin x}{2\,\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - \cos x}\,\mathrm{d}t.}$$

7. Soient $M > 0$ et $u \in \left]-1, 1\right[$. Pour tout $t \geqslant 0$,

$$\frac{1}{\operatorname{ch} t - u} = \frac{1}{\operatorname{ch} t}\,\frac{1}{1 - u/\operatorname{ch} t} = \frac{1}{\operatorname{ch} t} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{u}{\operatorname{ch} t}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}$$

car $|u/\operatorname{ch} t| \leqslant |u| < 1$. Alors, pour tout $t \in \left]0, M\right]$,

$$\frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - u} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u^n\,t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}.$$

◦ Les fonctions

$$g_n : \left]0, M\right] \to \mathbb{R}_+,\ t \mapsto \frac{u^n\,t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}$$

sont continues et intégrables sur $\left]0, M\right]$, car en 0^+, $|g_n(t)| \sim u^n\,t^{\alpha-1}$ et $\alpha > 0$.

◦ La série de fonctions $\sum g_n$ converge simplement sur $\left]0, M\right]$

◦ Sa somme

$$g : \left]0, M\right] \to \mathbb{R}_+,\ t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - u}$$

est continue sur $\left]0, M\right]$.

◦ Enfin, pour tout $n \geqslant 0$,

$$\int_0^M |g_n(t)|\,\mathrm{d}t = |u|^n \int_0^M \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \leqslant |u|^n \int_0^M t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t = K_1\,|u|^n$$

où $K_1 = \int_0^M t^{\alpha-1}\,dt$ ne dépend pas de n, donc $\sum \int_0^M |g_n|$ converge, car $|u| < 1$ et $\sum |u|^n$ converge.

Alors,

- la fonction g est intégrable sur $\left]0, M\right]$,
- et $\boxed{\displaystyle\int_0^M \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - u}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^M u^n\,\frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t.}$

8. Soit

$$\varphi_n : I \to \mathbb{R},\ M \mapsto \int_0^M \frac{u^n\,t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t.$$

◦ D'une part,

$$\lim_{M\to\infty} \varphi_n(M) = \int_0^\infty \frac{u^n\,t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t$$

car $t \mapsto \dfrac{u^n\,t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}$ est continue et intégrable sur I.

◦ D'autre part, pour tout $M > 0$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$|\varphi_n(M)| \leqslant \int_0^M \frac{|u|^n\,t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^\infty \frac{|u|^n\,t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \leqslant |u|^n \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t}\,\mathrm{d}t = K_2\,|u|^n$$

où $K_2 = \int_0^\infty t^{\alpha-1}\,\mathrm{d}t/\operatorname{ch} t$ ne dépend ni de M ni de n, donc $\sum \varphi_n$ converge normalement sur I.

Alors, d'après le théorème de double limite,

- la série des limites converge
- et l'on peut écrire

$$\lim_{M\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(M) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{M\to\infty} \varphi_n(M),$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\lim_{M\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} u^n \int_0^M \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t.}$$

9. La fonction g de la question 7 est aussi intégrable sur $\left[M, \infty\right[$ car $|g(t)| \sim 2\,t^{\alpha-1}\,e^{-t} \ll e^{-t/2}$ en ∞. Donc

$$\lim_{M\to\infty} \int_0^M \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - u}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - u}\,\mathrm{d}t.$$

Finalement, dans les questions 7 et 8, on a prouvé que pour tout $u \in \left]-1, 1\right[$,

$$\int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - u}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} u^n \int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}\,\mathrm{d}t = G_\alpha(u).$$

En appliquant ce résultat à $u = \cos x$ avec $x \in \mathbb{R} \smallsetminus 2\pi\mathbb{Z}$, on a bien $u \in \left]-1, 1\right[$ donc

$$\int_0^\infty \frac{t^{\alpha-1}}{\operatorname{ch} t - \cos x}\,\mathrm{d}t = G_\alpha(\cos x).$$

Grâce à la question 6, on conclut

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \smallsetminus 2\pi\mathbb{Z},\ S_\alpha(x) = \frac{\sin x\,G_\alpha(\cos x)}{2\,\Gamma(\alpha)}.}$$

10. Soit $\varepsilon > 0$. D'après (5), il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $s \in \left]0, \delta\right[$, $|B(s) - a\,s^{\lambda-1}| \leqslant \varepsilon\,a\,s^{\lambda-1}$. Alors $|B(s) - a\,s^{\lambda-1}|\,e^{-ns} \leqslant \varepsilon\,a\,s^{\lambda-1}\,e^{-ns} \leqslant \varepsilon\,a\,s^{\lambda-1}$. Or $\lambda > 0$ donc $s \mapsto s^{\lambda-1}$ est intégrable sur $\left]0, \delta\right[$. Alors

$$\left|\left(\int_0^\delta (B(s)\,e^{-ns} - a\,s^{\lambda-1}\,e^{-ns})\,\mathrm{d}s\right)\right| \leqslant \int_0^\delta |B(s)\,e^{-ns} - a\,s^{\lambda-1}\,e^{-ns}|\,\mathrm{d}s \leqslant \int_0^\delta \varepsilon\,a\,s^{\lambda-1}\,e^{-ns}\,\mathrm{d}s \leqslant \varepsilon\,a \int_0^\infty s^{\lambda-1}\,e^{-ns}\,\mathrm{d}s = \varepsilon\,a\,\frac{\Gamma(\lambda)}{n^\lambda}.$$

11. Soit $\delta > 0$. D'après (4), B est intégrable sur I donc $s \mapsto B(s)\,e^{-ns}$ aussi car $|B(s)\,e^{-ns}| \leqslant |B(s)|$. Comme plus haut, $s \mapsto a\,s^{\lambda-1}\,e^{-ns}$ est intégrable sur I. Alors

$$\begin{aligned}
&\left(\int_\delta^\infty (B(s)\,e^{-ns} - a\,s^{\lambda-1}\,e^{-ns})\,\mathrm{d}s\right) \\
&\leqslant \int_\delta^\infty |B(s)\,e^{-s} - a\,s^{\lambda-1}\,e^{-s}|\,e^{-(n-1)s}\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant e^{-(n-1)\delta} \int_\delta^\infty |B(s)\,e^{-s} - a\,s^{\lambda-1}\,e^{-s}|\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant e^{-(n-1)\delta} \int_0^\infty |B(s)\,e^{-s} - a\,s^{\lambda-1}\,e^{-s}|\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Constatons que $C = \int_0^\infty |B(s)\,e^{-s} - a\,s^{\lambda-1}\,e^{-s}|\,\mathrm{d}s$ ne dépend ici ni de n, ni de δ.

12. Soit $\varepsilon > 0$. D'après la question 10, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\left(\int_0^\delta (B(s)\,e^{-ns} - a\,s^{\lambda-1}\,e^{-ns})\,\mathrm{d}s\right) \leqslant \varepsilon\,a\,\frac{\Gamma(\lambda)}{n^\lambda}.$$

Fixons un tel δ. D'après la question 11,

$$\left(\int_\delta^\infty (B(s)\,e^{-ns} - a\,s^{\lambda-1}\,e^{-ns})\,\mathrm{d}s\right) \leqslant C\,e^{-(n-1)\delta}.$$

Or quand n tend vers ∞, $e^{-(n-1)\delta} \ll 1/n^\lambda$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$, $e^{-(n-1)\delta} \leqslant \varepsilon/n^\lambda$ et

$$\left(\int_\delta^\infty (B(s)\,e^{-ns} - a\,s^{\lambda-1}\,e^{-ns})\,\mathrm{d}s\right) \leqslant \varepsilon\,\frac{C}{n^\lambda}.$$

Alors

$$\begin{aligned}
&\left(\int_0^\infty (B(s)\,e^{-ns} - a\,s^{\lambda-1}\,e^{-ns})\,\mathrm{d}s\right) \\
&= \Bigg| \int_0^\delta (B(s)\,e^{-ns} - a\,s^{\lambda-1}\,e^{-ns})\,\mathrm{d}s \\
&\qquad + \int_\delta^\infty (B(s)\,e^{-ns} - a\,s^{\lambda-1}\,e^{-ns})\,\mathrm{d}s \Bigg| \\
&\leqslant \left(\int_0^\delta (B(s)\,e^{-ns} - a\,s^{\lambda-1}\,e^{-ns})\,\mathrm{d}s\right) \\
&\qquad + \left(\int_\delta^\infty (B(s)\,e^{-ns} - a\,s^{\lambda-1}\,e^{-ns})\,\mathrm{d}s\right) \\
&\leqslant \varepsilon\,\frac{a\,\Gamma(\lambda) + C}{n^\lambda}.
\end{aligned}$$

Comme ε est arbitraire, cela signifie que quand n tend vers ∞,

$$\int_0^\infty (B(s)\,e^{-ns} - a\,s^{\lambda-1}\,e^{-ns})\,\mathrm{d}s = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\lambda}\right),$$

ou encore, que

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty B(s)\,e^{-ns}\,\mathrm{d}s &= \int_0^\infty a\,s^{\lambda-1}\,e^{-ns}\,\mathrm{d}s + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\lambda}\right) \\
&= a\,\frac{\Gamma(\lambda)}{n^\lambda} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^\lambda}\right) = a\,\frac{\Gamma(\lambda)}{n^\lambda}\,(1 + \mathrm{o}(1)).
\end{aligned}$$

13. En comparant la formule (3) et l'expression proposée, posons $t = \ln(e^s + \sqrt{e^{2s} - 1})$. Alors $\operatorname{ch} t = e^s$ et $\mathrm{d}t = \dfrac{e^s}{\sqrt{e^{2s} - 1}}\,\mathrm{d}s$.

L'application $s \mapsto \ln(e^s + \sqrt{e^{2s} - 1})$ est bien une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de I dans I. D'après le théorème du changement de variable, les applications

$$t \mapsto \frac{t^{\alpha-1}}{(\operatorname{ch} t)^{n+1}}$$
$$\text{et } s \mapsto \frac{(\ln(e^s + \sqrt{e^{2s} - 1}))^{\alpha-1}}{e^{(n+1)s}} \left(\frac{e^s}{\sqrt{e^{2s} - 1}}\right)$$

sont simultanément intégrables sur I. La première l'est, donc la seconde aussi et l'on a

$$a_n = \int_0^\infty \frac{(\ln(e^s + \sqrt{e^{2s} - 1}))^{\alpha-1}}{\sqrt{e^{2s} - 1}}\,e^{-ns}\,\mathrm{d}s.$$

14. Pour s au voisinage de 0^+,

$$\sqrt{e^{2s} - 1} = \sqrt{2\,s + \mathrm{o}(s)} = \sqrt{2\,s}\,\sqrt{1 + \mathrm{o}(1)} \sim \sqrt{2\,s}.$$

De même,

$$\begin{aligned}
&\ln(e^s + \sqrt{e^{2s} - 1}) \\
&= \ln(1 + s + \mathrm{o}(s) + \sqrt{2\,s} + \mathrm{o}(\sqrt{s})) \\
&= \ln(1 + \sqrt{2\,s} + \mathrm{o}(\sqrt{s})) \\
&= \sqrt{2\,s} + \mathrm{o}(\sqrt{s}),
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
&(\ln(e^s + \sqrt{e^{2s} - 1}))^{\alpha-1} = (\sqrt{2\,s} + \mathrm{o}(\sqrt{s}))^{\alpha-1} \\
&= (\sqrt{2\,s})^{\alpha-1}(1 + \mathrm{o}(1))^{\alpha-1} \sim (\sqrt{2\,s})^{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Alors

$$B(s) \sim \frac{(\sqrt{2\,s})^{\alpha-1}}{\sqrt{2\,s}} = 2^{\alpha/2-1}\,s^{\alpha/2-1}.$$

15. Ainsi, l'équivalent de $B(s)$ en 0^+ est conforme à (5), avec $a = 2^{\alpha/2-1} > 0$ et $\lambda = \alpha/2 > 0$.

De plus, la fonction B est l'intégrande de la nouvelle expression de a_0, donc elle est bien intégrable sur I d'après la question 13, et B vérifie la condition (4).

Alors, d'après la question 12, quand n est grand,

$$a_n \sim 2^{\alpha/2-1}\,\frac{\Gamma(\alpha/2)}{n^{\alpha/2}},$$

$$\text{donc } \lim_{n\to\infty} a_n\,n^{\alpha/2} = 2^{\alpha/2-1}\,\Gamma(\alpha/2).$$