

# Dix-neuvième devoir à la maison

[d'après CS99]

Calculatrices autorisées

**Les hypothèses des théorèmes utilisés devront être précisées et vérifiées.**

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés de la fonction  $\zeta$ , qui sera définie dans la première partie, et d'établir, pour  $s$  réel de l'intervalle  $]0, 1[$ , l'équation fonctionnelle suivante :

$$(E) \quad \zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s) \zeta(s)$$

$$\text{avec } \Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt.$$

On posera dans tout le problème, pour tout entier naturel non nul  $N$  et pour tout réel  $s > 0$  :

$$S_N(s) = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}, \quad H_N(s) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s},$$

$$\text{et } K_N(s) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{(2n-1)^s}.$$

## Partie I – Définition et propriétés de $\zeta$

### I.A – Définition de $\zeta$ .

Soit  $s > 0$ ,  $n$  un entier naturel non nul. Posons :

$$u_n(s) = \frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s}.$$

I.A.1) Montrer que :

$$0 < u_n(s) \leq \frac{s}{n^{s+1}}.$$

I.A.2) Prouver que la série de fonctions de terme général  $u_n$  converge simplement sur  $]0, +\infty[$  et que sa somme, qui sera notée  $U$  dans la suite, est une fonction continue sur  $]0, +\infty[$ .

I.A.3) Prouver que, pour  $s \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ , la suite de terme général :

$$H_N(s) - \frac{N^{1-s}}{1-s}$$

possède une limite, notée  $\zeta(s)$ , que l'on exprimera à l'aide de  $U(s)$ .

I.A.4) Prouver que la suite de terme général  $H_N(1) - \ln N$  admet une limite strictement positive notée  $\gamma$  dans la suite du problème.

### I.B – Autre expression de $\zeta$ .

I.B.1) Soit  $s$  un réel strictement positif ; prouver que la série de fonctions de la variable réelle  $s$  :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

définit sur  $]0, +\infty[$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  qui sera notée  $f$  dans la suite.

I.B.2) Exprimer  $S_{2N}(s)$  à l'aide de  $H_{2N}(s)$  et  $H_N(s)$ . En déduire, si  $s \in ]0, 1[ \cup ]1, +\infty[$  :

$$f(s) = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right) \zeta(s).$$

I.B.3) En déduire, en décomposant autrement  $S_{2N}(s)$  que, pour les mêmes valeurs de  $s$ , la suite de terme général

$$K_N(s) - \frac{N^{1-s}}{2^s(1-s)}$$

a une limite qu'on exprimera à l'aide de  $\zeta(s)$ .

### I.C – Un calcul approché.

Dans cette question, on négligera les erreurs d'arrondi. Donner un algorithme de calcul approché de  $f(s)$  à une précision  $\varepsilon$  fournie. L'appliquer au calcul de  $\zeta(\frac{1}{2})$  à  $10^{-1}$  près.

### I.D – Étude au voisinage de $+\infty$ .

Quelle est la limite de  $f$  lorsque  $s$  tend vers  $+\infty$  ?

### I.E – Étude au voisinage de 1.

I.E.1) Montrer que, lorsque  $s$  est au voisinage de 1,

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1).$$

I.E.2) Prouver, en calculant  $f'(1)$  de deux façons, que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n} = \left(\gamma - \frac{\ln 2}{2}\right) \ln 2.$$

## Partie II – Calcul de sommes de séries et d'intégrales

On admet les relations suivantes :

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - n^2} \text{ pour } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},$$

$$\frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 + (2n+1)^2 \pi^2} \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

II.A – Soient  $s > 0$  et  $x > -1$  ; prouver l'intégrabilité sur  $]0, +\infty[$  de

$$t \mapsto \frac{t^{s-1}}{e^t + x}.$$

On désignera, dans la suite, par  $\Gamma(s)$  la valeur de l'intégrale correspondante pour  $x = 0$  (cf préambule).

**II.B** – Dans cette question  $x$  est un réel tel que  $|x| < 1$  et  $s$  est un réel strictement positif.

II.B.1) Démontrer la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t + x} dt = \Gamma(s) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)^s}.$$

II.B.2) En déduire la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t + 1} dt = \Gamma(s) f(s).$$

**II.C** – Dans cette question,  $x$  et  $s$  sont des réels de l'intervalle  $]0, 1[$ .

On fixe  $x$  et on définit une suite  $(v_n)$  de fonctions définies sur l'intervalle  $]0, 1]$  par :

$$\begin{cases} v_0(t) = t^{x-1}, \\ v_n(t) = (-1)^n t^{n-1} |t^x - t^{-x}| \text{ si } n \geq 1. \end{cases}$$

II.C.1) Calculer  $\int_0^1 v_n(t) dt$ . Prouver la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{t+1} dt = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

II.C.2) Soit  $a$  un réel strictement positif. Calculer les intégrales :

$$\begin{aligned} I(a, s) &= \int_0^{+\infty} \frac{t^s}{a^2 + t^2} dt, \\ J(a, s) &= \int_0^{+\infty} t^{s-1} \operatorname{Arctan}\left(\frac{a}{t}\right) dt. \end{aligned}$$

## Partie III – Équation fonctionnelle de la fonction $\zeta$

**III.A – Où l'on obtient (E).**

Dans cette question,  $s$  vérifie toujours  $0 < s < 1$ . Pour  $x > 0$  et  $N \in \mathbb{N}^*$ , on pose

$$\phi_N(x) = \frac{1}{e^x + 1} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2x}{x^2 + (2n+1)^2 \pi^2}.$$

III.A.1) Établir les inégalités :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \operatorname{Arctan}\left(\frac{(2N-1)\pi}{x}\right) &\leq \phi_N(x) \\ &\leq \frac{1}{\pi} \operatorname{Arctan}\left(\frac{(2N+1)\pi}{x}\right). \end{aligned}$$

III.A.2) En déduire l'encadrement :

$$\begin{aligned} \frac{(2N-1)^s}{2s} - K_N(1-s) &\leq \pi^{-s} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s) f(s) \\ &\leq \frac{(2N+1)^s}{2s} - K_N(1-s) \end{aligned}$$

puis l'équation fonctionnelle (E).

**III.B – Retour sur l'étude de  $\zeta$  au voisinage de 0.**

III.B.1) Démontrer que  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $]0, +\infty[$  et que :

$$\Gamma'(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t dt.$$

On pourra utiliser l'inégalité  $(1 - t/n)^n \leq e^{-t}$  que l'on ne démontrera que si l'on a le temps.

III.B.2) En utilisant un changement de variable, déduire que  $\Gamma'(1) = -\gamma$ .

III.B.3) Trouver un développement limité au premier ordre de  $\zeta$  au voisinage de 0.