

Dix-neuvième devoir à la maison

[d'après CS99]
Calculatrices autorisées

Les hypothèses des théorèmes utilisés devront être précisées et vérifiées.

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés de la fonction ζ , qui sera définie dans la première partie, et d'établir, pour s réel de l'intervalle $]0, 1[$, l'équation fonctionnelle suivante :

$$(E) \quad \zeta(1-s) = 2(2\pi)^{-s} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s) \zeta(s)$$

avec $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$.

On posera dans tout le problème, pour tout entier naturel non nul N et pour tout réel $s > 0$:

$$S_N(s) = \sum_{n=1}^N \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}, \quad H_N(s) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s},$$

et $K_N(s) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{(2n-1)^s}$.

Partie I – Définition et propriétés de ζ

I.A – Définition de ζ .

Soit $s > 0$, n un entier naturel non nul. Posons :

$$u_n(s) = \frac{1}{n^s} - \int_n^{n+1} \frac{dt}{t^s}.$$

I.A.1) Montrer que :

$$0 < u_n(s) \leq \frac{s}{n^{s+1}}.$$

I.A.2) Prouver que la série de fonctions de terme général u_n converge simplement sur $]0, +\infty[$ et que sa somme, qui sera notée U dans la suite, est une fonction continue sur $]0, +\infty[$.

I.A.3) Prouver que, pour $s \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$, la suite de terme général :

$$H_N(s) - \frac{N^{1-s}}{1-s}$$

possède une limite, notée $\zeta(s)$, que l'on exprimera à l'aide de $U(s)$.

I.A.4) Prouver que la suite de terme général $H_N(1) - \ln N$ admet une limite strictement positive notée γ dans la suite du problème.

I.B – Autre expression de ζ .

I.B.1) Soit s un réel strictement positif; prouver que la série de fonctions de la variable réelle s :

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

définit sur $]0, +\infty[$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 qui sera notée f dans la suite.

I.B.2) Exprimer $S_{2N}(s)$ à l'aide de $H_{2N}(s)$ et $H_N(s)$. En déduire, si $s \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$:

$$f(s) = \left(1 - \frac{1}{2^{s-1}}\right) \zeta(s).$$

I.B.3) En déduire, en décomposant autrement $S_{2N}(s)$ que, pour les mêmes valeurs de s , la suite de terme général

$$K_N(s) - \frac{N^{1-s}}{2^s(1-s)}$$

a une limite qu'on exprimera à l'aide de $\zeta(s)$.

I.C – Un calcul approché.

Dans cette question, on négligera les erreurs d'arrondi. Donner un algorithme de calcul approché de $f(s)$ à une précision ε fournie. L'appliquer au calcul de $\zeta(\frac{1}{2})$ à 10^{-1} près.

I.D – Étude au voisinage de $+\infty$.

Quelle est la limite de f lorsque s tend vers $+\infty$?

I.E – Étude au voisinage de 1.

I.E.1) Montrer que, lorsque s est au voisinage de 1,

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + o(1).$$

I.E.2) Prouver, en calculant $f'(1)$ de deux façons, que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n} = \left(\gamma - \frac{\ln 2}{2}\right) \ln 2.$$

Partie II – Calcul de sommes de séries et d'intégrales

On admet les relations suivantes :

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - n^2} \text{ pour } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z},$$

$$\frac{1}{e^x + 1} = \frac{1}{2} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 + (2n+1)^2 \pi^2} \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

II.A – Soient $s > 0$ et $x > -1$; prouver l'intégrabilité sur $]0, +\infty[$ de

$$t \mapsto \frac{t^{s-1}}{e^t + x}.$$

On désignera, dans la suite, par $\Gamma(s)$ la valeur de l'intégrale correspondante pour $x = 0$ (cf préambule).

II.B – Dans cette question x est un réel tel que $|x| < 1$ et s est un réel strictement positif.

II.B.1) Démontrer la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t + x} dt = \Gamma(s) \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(n+1)^s}.$$

II.B.2) En déduire la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t + 1} dt = \Gamma(s) f(s).$$

II.C – Dans cette question, x et s sont des réels de l'intervalle $]0, 1[$.

On fixe x et on définit une suite (v_n) de fonctions définies sur l'intervalle $]0, 1]$ par :

$$\begin{cases} v_0(t) = t^{x-1}, \\ v_n(t) = (-1)^n t^{n-1} |t^x - t^{-x}| \text{ si } n \geq 1. \end{cases}$$

II.C.1) Calculer $\int_0^1 v_n(t) dt$. Prouver la relation :

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{t+1} dt = \frac{\pi}{\sin \pi x}.$$

II.C.2) Soit a un réel strictement positif. Calculer les intégrales :

$$\begin{aligned} I(a, s) &= \int_0^{+\infty} \frac{t^s}{a^2 + t^2} dt, \\ J(a, s) &= \int_0^{+\infty} t^{s-1} \operatorname{Arctan}\left(\frac{a}{t}\right) dt. \end{aligned}$$

Partie III – Équation fonctionnelle de la fonction ζ

III.A – Où l'on obtient (E).

Dans cette question, s vérifie toujours $0 < s < 1$. Pour $x > 0$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\phi_N(x) = \frac{1}{e^x + 1} + \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2x}{x^2 + (2n+1)^2 \pi^2}.$$

III.A.1) Établir les inégalités :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \operatorname{Arctan}\left(\frac{(2N-1)\pi}{x}\right) &\leq \phi_N(x) \\ &\leq \frac{1}{\pi} \operatorname{Arctan}\left(\frac{(2N+1)\pi}{x}\right). \end{aligned}$$

III.A.2) En déduire l'encadrement :

$$\begin{aligned} \frac{(2N-1)^s}{2s} - K_N(1-s) \\ \leq \pi^{-s} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \Gamma(s) f(s) \\ \leq \frac{(2N+1)^s}{2s} - K_N(1-s) \end{aligned}$$

puis l'équation fonctionnelle (E).

III.B – Retour sur l'étude de ζ au voisinage de 0.

III.B.1) Démontrer que Γ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\Gamma'(1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln t dt.$$

On pourra utiliser l'inégalité $(1 - t/n)^n \leq e^{-t}$ que l'on ne démontrera que si l'on a le temps.

III.B.2) En utilisant un changement de variable, déduire que $\Gamma'(1) = -\gamma$.

III.B.3) Trouver un développement limité au premier ordre de ζ au voisinage de 0.