Corrigé du dix-neuvième devoir à la maison

Commentaire. Selon la demande claire de l'énoncé, le corrigé citera explicitement les théorèmes utilisés.

I.A.1. Soient $s > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Introduisons $\varphi : t \mapsto 1/t^s$ et Φ une primitive de φ sur $]1, +\infty]$. Alors

$$\begin{aligned} u_n(s) &= \varphi(n) - \int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \Phi'(n) - (\Phi(n+1) - \Phi(n)). \end{aligned}$$

Sur le segment $[n, n+1]$, φ décroit strictement donc $\varphi \leqslant \varphi(n)$, $\int_n^{n+1} \varphi(t)\,\mathrm{d}t < \varphi(n)$ et $u_n(s) > 0$.

De plus, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange,

$$\begin{aligned} |\Phi(n+1) - \Phi(n) - \Phi'(n)| &\leqslant \|\Phi''\|_\infty^{[n,n+1]} \\ &= \|\varphi'\|_\infty^{[n,n+1]} = \frac{s}{n^{s+1}}. \end{aligned}$$

Finalement, $0 < u_n(s) \leqslant \dfrac{s}{n^{s+1}}$.

I.A.2. Or $s + 1 > 1$ car $s > 0$ donc $\sum 1/n^{s+1}$ converge et $\sum u_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

De plus, sur tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$, $0 \leqslant u_n(s) \leqslant b/n^{a+1}$ où $\sum 1/n^{a+1}$ converge, alors $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ et U est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

I.A.3. Soit $s \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$. On a

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N u_n(s) &= \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} - \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \\ &= H_N(s) - \int_1^N \frac{\mathrm{d}t}{t^s} - \int_N^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \\ &= H_N(s) - \frac{(N^{1-s} - 1)}{1-s} - \int_N^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s}. \end{aligned}$$

Or $\displaystyle\int_N^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^s} \leqslant \frac{1}{N^s} \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$, donc

$$\lim_{N \to +\infty} \left(H_N(s) - \frac{N^{1-s}}{1-s} \right) = \zeta(s) = U(s) + \frac{1}{s-1}.$$

I.A.4. De même,

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^N u_n(1) &= H_N(1) - \int_1^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \\ &= H_N(1) - \ln(N+1), \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} H_N(1) - \ln N &= \sum_{n=1}^N u_n(1) + \ln\left(1 + \frac{1}{N}\right) \\ &\xrightarrow[N \to +\infty]{} U(1). \end{aligned}$$

Comme $u_n(1) > 0$, $U(1) > 0$ donc

$$\lim_{N \to +\infty} (H_N(1) - \ln N) = \gamma = U(1) > 0.$$

I.B.1. Posons $f_n : s \mapsto (-1)^{n-1}/n^s$. Si

- (*i*) les f_n sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$;
- (*ii*) la série de fonctions converge simplement sur $]0, +\infty[$;
- (*iii*) la série de fonctions $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout segment de $]0, +\infty[$;

alors

- la somme $f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, +\infty[$;
- $f' = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'$.

Vérifions donc les hypothèses.

(*i*) C'est évident et $f_n'(s) = (-1)^n \ln n/n^s$.

(*ii*) Pour $s > 0$, la suite numérique $(|f_n(s)|)$ tend vers 0 en décroissant donc la série numérique $\sum f_n(s)$ converge grâce au critère spécial des séries alternées.

(*iii*) Pour $s > 0$, la suite numérique $(|f_n'(s)|)$ tend vers 0, mais elle ne décroit qu'à partir du rang $n(s) = \lfloor e^{1/s} \rfloor + 1$: le critère spécial des séries alternées s'applique donc à la série $\sum_{n \geqslant n(s)} f_n'(s)$ qui converge. Il s'ensuit que la série $\sum f_n'(s)$ converge et que la série de fonctions $\sum f_n'$ converge simplement sur $]0, +\infty[$.

Pour la convergence uniforme, on veut majorer le reste, mais on ne sait le faire qu'à partir du rang $n(s)$, donc pas uniformément. On se place alors sur $[a, +\infty[$ avec $a > 0$. Pour $s \in [a, +\infty[$, la suite $(|f_n'(s)|)_{n \geqslant n(a)}$ décroit et pour $n \geqslant n(a)$,

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} f_k'(s) \right| \leqslant |f_{n+1}'(s)| \leqslant \frac{\ln n}{n^a}.$$

On en déduit que la série de fonctions $\sum_{n \geqslant n(a)} f_n'$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ donc il en est de même pour la série de fonctions $\sum f_n'$.

I.B.2. On a

$$\begin{aligned} &S_{2N}(s) \\ &= \sum_{n=1}^{2N} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s} = \sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{(2p+1)^s} - \sum_{p=1}^N \frac{1}{(2p)^s} \\ &= \sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{(2p+1)^s} + \sum_{p=1}^N \frac{1}{(2p)^s} - 2 \sum_{p=1}^N \frac{1}{(2p)^s} \\ &= \sum_{n=1}^{2N} \frac{1}{n^s} - \frac{2}{2^s} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n^s} = H_{2N}(s) - \frac{1}{2^{s-1}} H_N(s) \\ &= H_{2N}(s) - \frac{(2N)^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{2^{s-1}} \left(H_N(s) - \frac{N^{1-s}}{1-s} \right). \end{aligned}$$

D'après I.B.1 et I.A.3, en passant à la limite sur N, $f(s) = (1 - 2^{1-s})\zeta(s)$.

I.B.3. Du calcul précédent, on tire

$$\begin{aligned} &S_{2N}(s) \\ &= \sum_{p=0}^{N-1} \frac{1}{(2p+1)^s} - \frac{1}{2^s} \sum_{p=1}^N \frac{1}{p^s} \\ &= K_N(s) - \frac{1}{2^s} H_N(s) \\ &= K_N(s) - \frac{N^{1-s}}{2^s(1-s)} - \frac{1}{2^s} \left(H_N(s) - \frac{N^{1-s}}{1-s} \right) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&K_N(s) - \frac{N^{1-s}}{2^s\,(1-s)}\\
&= S_{2N}(s) + \frac{1}{2^s}\left(H_N(s) - \frac{N^{1-s}}{1-s}\right)\\
&\xrightarrow[N\to+\infty]{} f(s) + 2^{-s}\zeta(s) = (1 - 2^{1-s} + 2^{-s})\,\zeta(s),
\end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\lim_{N\to+\infty}\left(K_N(s) - \frac{N^{1-s}}{2^s\,(1-s)}\right) = (1-2^{-s})\,\zeta(s).}$$

I.C. On a $|f(s) - S_N(s)| \leqslant |f_{N+1}(s)|$ car $\sum f_n(s)$ est alternée, donc si l'on prend $S_N(s)$ comme valeur approchée de $f(s)$, pour que l'erreur commise soit inférieure à ε, il suffit de prendre $|f_{N+1}(s)| = (N+1)^{-s} \leqslant \varepsilon$, c'est-à-dire $N \geqslant \varepsilon^{-1/s} - 1$. En prenant $\varepsilon = 10^{-1}$ et $s = \frac{1}{2}$, on a $N \geqslant 99$: il suffit de calculer $S_{99}(\frac{1}{2})$, et l'on trouve $f(\frac{1}{2}) = 0{,}6$ à 10^{-1} près (par excès, puisque $S_{99}(s) \geqslant f(s)$). Alors, $\zeta(\frac{1}{2}) = f(\frac{1}{2})/(1 - 2^{1/2}) = -1{,}5$ (par défaut à 10^{-1} près, à cause du changement de signe).

I.D. Soit $a > 0$. Pour $s \in [a, +\infty[$,

$$|f(s) - S_N(s)| \leqslant \frac{1}{(N+1)^s} \leqslant \frac{1}{(N+1)^a}$$

donc $\sum f_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$. De plus, $f_1 = 1$ et si $n \geqslant 2$, $\lim_{s\to+\infty} f_n(s) = 0$. Alors, la série de ces limites converge (ce qui n'est vraiment pas une surprise) et l'on peut permuter :

$$\boxed{\lim_{s\to+\infty} f(s) = 1.}$$

I.E.1. D'après les questions précédentes, U est continue en 1 donc au voisinage de 1, $U(s) = U(1) + \mathrm{o}(1)$, et comme $U(1) = \gamma$ et $\zeta(s) = U(s) + \dfrac{1}{s-1}$,

$$\boxed{\text{au voisinage de 1, } \zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + \mathrm{o}(1).}$$

I.E.2. D'une part,

$$f'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n}.$$

D'autre part, $f(s) = (1 - 2^{1-s})\,\zeta(s)$. Quand s est au voisinage de 1, en posant $s = 1 + h$,

$$1 - 2^{1-s} = 1 - e^{-h\ln 2} = h\ln 2 - \tfrac{1}{2}\ln^2 2\, h^2 + \mathrm{o}(h^2),$$

donc

$$\begin{aligned}
f(s) &= (h\ln 2 - \tfrac{1}{2}\ln^2 2\,h^2 + \mathrm{o}(h^2))(\tfrac{1}{h} + \gamma + \mathrm{o}(1))\\
&= \ln 2 + (\gamma\ln 2 - \tfrac{1}{2}\ln^2 2)\,h + \mathrm{o}(h).
\end{aligned}$$

Par unicité du développement limité de f en 1 à l'ordre 1, $f'(1) = \gamma\ln 2 - \frac{1}{2}\ln^2 2$.

$$\boxed{\text{Finalement, } \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{n} = \left(\gamma - \frac{\ln 2}{2}\right)\ln 2.}$$

II.A. D'abord, $\alpha : t \mapsto t^{s-1}/(e^t + x)$ est continue sur $]0, +\infty[$. Quand t est au voisinage de $+\infty$, $\alpha(t) \ll 1/t^2$ et $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $]1, +\infty]$. Quand t est au voisinage de 0, $\alpha(t) \sim 1/[(x+1)t^{1-s}]$ et $t \mapsto 1/t^{1-s}$ est intégrable sur $]0, 1]$ car $1 - s < 1$.

$$\boxed{t \mapsto \frac{t^{s-1}}{e^t + x} \text{ est bien intégrable sur }]0, +\infty[.}$$

II.B.1. Voici un calcul formel, que l'on justifiera ensuite. Pour clarifier les justifications, on a numéroté les égalités qui posent problème.

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t + x}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}\,e^{-t}}{1 + x\,e^{-t}}\,\mathrm{d}t\\
(1)\qquad &= \int_0^{+\infty} t^{s-1}\,e^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\,x^n\,e^{-nt}\,\mathrm{d}t\\
(2)\qquad &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\,x^n \int_0^{+\infty} t^{s-1}\,e^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t\\
(3)\qquad &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n\,x^n \int_0^{+\infty} \left(\frac{u}{n+1}\right)^{s-1} e^{-u}\,\frac{\mathrm{d}u}{n+1}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n\,x^n}{(n+1)^s}\,\Gamma(s)
\end{aligned}$$

et l'on a bien l'égalité demandée.

Justifions le calcul :

(1) Comme $|x| < 1$ et $t \geqslant 0$, $|-x\,e^{-t}| < 1$ donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-x\,e^{-t})^n = \frac{1}{1 - (-x\,e^{-t})}.$$

(3) On a posé $u = (n+1)t$: il s'agit bien d'une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}_+$ dans lui-même, donc

$$t \mapsto t^{s-1}\,e^{-(n+1)t} \text{ et } u \mapsto \left(\frac{u}{n+1}\right)^{s-1} e^{-u}\,\frac{1}{n+1}$$

sont simultanément intégrable sur $]0, +\infty[$.

(2) Posons $g_n : t \mapsto (-1)^n\,x^n\,t^{s-1}\,e^{-(n+1)t}$. Si

- ◦ (i) les g_n sont continues par morceaux et intégrables sur $]0, +\infty[$;
- ◦ (ii) la série $\sum g_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$;
- ◦ (iii) la somme $g = \sum_0^{+\infty} g_n$ est continue par morceaux sur $]0, +\infty[$;
- ◦ (iv) la série $\sum \int_0^{+\infty} |g_n|$ converge,

alors

- g est intégrable sur $]0, +\infty[$;
- $\int_0^{+\infty} g = \sum_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} g_n$, ce qui est la justification attendue.

Il reste à vérifier les hypothèses.

(i) Les g_n sont évidemment continues sur $]0, +\infty[$. Quand $t \to 0$, $|g_n(t)| \leqslant |x|^n/t^{1-s}$ et $t \mapsto 1/t^{1-s}$ est intégrable sur $]0, 1]$ car $1 - s < 1$. Quand $t \to +\infty$, $|g_n(t)| \ll 1/t^2$. Donc g_n est intégrable sur $]0, +\infty[$.

(ii) Pour $t \geqslant 0$, la série $\sum g_n(t)$ est une série géométrique de raison $|-x\,e^{-t}| \in [0, 1[$ donc elle converge.

Commentaire. C'est en fait la justification (1) ci-dessus.

(iii) La somme est $g : t \mapsto t^{s-1}\,e^{-t}/(1 + x\,e^t)$ qui évidemment continue sur $]0, +\infty[$.

(iv) Avec le changement de variable de la justification (3), $I_n = \int_0^{+\infty} |g_n| = |x|^n \,\Gamma(s)/(n+1)^s$. On utilise la règle de D'Alembert : $I_{n+1}/I_n = |x|\,(1+1/n)^{-s}$ tend vers $|x| < 1$ quand $n \to +\infty$ et $\sum \int_0^{+\infty} |g_n|$ converge.

II.B.2. Pour obtenir l'égalité voulue, il « suffit » de faire tendre x vers 1 dans les deux membres. Là encore, il reste à justifier que c'est possible.

Premier membre. Par caractérisation séquentielle, il suffit de prouver que pour toute suite (x_n) de $]-1,1[$ tendant vers 1,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t + x_n}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t+1}\,\mathrm{d}t.$$

Soit une telle suite. Posons $h_n : t \mapsto t^{s-1}/(e^t + x_n)$ et utilisons le théorème de convergence dominée : si

- (i) les h_n sont continues par morceaux sur $]0,+\infty[$;
- (ii) la suite de fonctions (h_n) converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers une certaine fonction h ;
- (iii) h est continue par morceaux sur $]0,+\infty[$;
- (iv) il existe une fonction φ continue, positive et intégrable sur $]0,+\infty[$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|h_n| \leqslant \varphi$,

alors

- les h_n et h sont intégrables sur $]0,+\infty[$;
- $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} h_n = \int_0^{+\infty} h$, ce qui est exactement ce que l'on voulait.

Vérifions les hypothèses :

(i), (ii) & (iii) Évident et $h : t \mapsto t^{s-1}/(e^t+1)$.

(iv) D'après II.A, h est intégrable sur $]0,+\infty[$ (les h_n aussi). Comme $|x_n| < 1$, pour $t \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant h_n(t) \leqslant h(t)$ et c'est la domination voulue.

Second membre. Notons $k_n : x \mapsto (-1)^n x^n/(n+1)^s$. Les k_n sont continues sur $[0,1]$; de plus, grâce au critère spécial des séries alternées, $\sum k_n$ converge simplement sur $[0,1]$ et

$$\left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} k_n(x)\right| \leqslant \frac{1}{(N+2)^s}$$

donc $\sum k_n$ converge uniformément sur $[0,1]$. Il s'ensuit que $\sum_0^{+\infty} k_n$ est continue sur $[0,1]$, donc

$$\lim_{x\to1} \sum_{n=0}^{+\infty} k_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} k_n(1) = f(s).$$

II.C.1. On a $\int_0^1 v_0 = 1/x$.

Si $n > 0$, comme $|t| \leqslant 1$ et $x > 0$, $t^x \leqslant t^{-x}$ donc

$$\int_0^1 v_n = (-1)^n \left(-\int_0^1 t^{x+n-1}\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t^{-x+n-1}\,\mathrm{d}t \right)$$
$$= (-1)^n \left(-\frac{1}{x+n} + \frac{1}{-x+n} \right) = \frac{(-1)^n\, 2x}{n^2 - x^2}.$$

Voici un calcul formel (dont la justification est laissée en exercice :-)

$$\frac{\pi}{\sin \pi x} = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2x}{x^2 - n^2}$$
$$= \int_0^1 v_0(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^1 v_n(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 v_0(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 \sum_{n=1}^{+\infty} v_n(t)\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 \left(t^{x-1} - \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(t^{n-1-x} - t^{n-1+x}\right) \right) \mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 \left(t^{x-1} + \frac{t^{-x}}{1+t} - \frac{t^x}{1+t} \right) \mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 \frac{t^{x-1} + t^{-x}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{u^{x-1}}{1+u}\,\mathrm{d}u$$
$$= \int_0^{+\infty} \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$$

en ayant posé $u = 1/t$.

II.C.2. D'abord, $t \mapsto t^s/(a^2+t^2)$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ car $t^s/(a^2+t^2) \sim_{t\to0} t^s/a^2$ avec $s > 0$ et $t^s/(a^2+t^2) \sim_{t\to+\infty} 1/t^{2-s}$ avec $2 - s > 1$: donc $I(a,s)$ existe. En posant $t = a\,u$, on a

$$I(a,s) = \int_0^{+\infty} \frac{a^s\,u^s}{a^2 + a^2\,u^2}\,a\,\mathrm{d}u$$
$$= a^{s-1} \int_0^{+\infty} \frac{u^s}{1+u^2}\,\mathrm{d}u.$$

En posant $v = u^2$ qui est une bijection de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0,+\infty[$ dans lui-même,

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^s\,\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{v^{(s-1)/2}}{1+v}\,\mathrm{d}v$$
$$= \frac{\pi}{2\sin(\frac{\pi}{2}(s+1))}.$$

$$\text{donc } I(a,s) = \frac{\pi\,a^{s-1}}{2\cos(\frac{\pi}{2}\,s)}.$$

La fonction $t \mapsto t^{s-1}\operatorname{Arctan}(a/t)$ est continue et intégrable sur $]0,+\infty[$ car $t^{s-1}\operatorname{Arctan}(a/t) \sim_{t\to0} \pi/(2t^{1-s})$ avec $1 - s < 1$ et $t^{s-1}\operatorname{Arctan}(a/t) \sim_{t\to+\infty} a/t^{2-s}$ avec $2 - s > 1$: donc $J(a,s)$ existe. On fait une intégration par parties, qui est licite car les termes manipulés ont un sens :

$$J(a,s) = \left[\frac{t^s}{s}\operatorname{Arctan}\frac{a}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{t^s}{s}\,\frac{a/t^2}{1+a^2/t^2}\,\mathrm{d}t$$
$$= \frac{a}{s}\,I(a,s).$$

$$\text{donc } J(a,s) = \frac{\pi\,a^s}{2\,s\cos(\frac{\pi}{2}\,s)}.$$

III.A.1. D'après II,

$$\phi_N(x) = \frac{1}{2} - \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 + (2n+1)^2\pi^2}.$$

Pour encadrer cette somme, on pense à la comparer à une intégrale. La fonction

$$\psi : t \mapsto \frac{2x}{x^2 + (2t+1)^2\pi^2}$$

est continue, décroissante et intégrable sur $]0,+\infty[$,

$$\text{donc} \qquad \int_n^{n+1} \psi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \psi(n) \leqslant \int_{n-1}^n \psi(t)\,\mathrm{d}t,$$

et $\displaystyle\int_N^{+\infty} \psi(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=N}^{+\infty} \psi(n) \leqslant \int_{N-1}^{+\infty} \psi(t)\,\mathrm{d}t.$

Or
$$\int_N^{+\infty} \psi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{2}{x}\int_N^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+(2t+1)^2\pi^2/x^2}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\operatorname{Arctan}\frac{(2t+1)\pi}{x}\right]_N^{+\infty}$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\frac{(2N+1)\pi}{x}$$

et $\displaystyle\int_{N-1}^{+\infty} \psi(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\frac{(2N-1)\pi}{x}$ donc
$$\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\frac{(2N-1)\pi}{x} \leqslant \phi_N(x) \leqslant \frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\frac{(2N+1)\pi}{x}.$$

III.A.2. On a
$$\Gamma(s)\,f(s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t+1}\,\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{+\infty} t^{s-1}\left(\phi_N(t) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{2t}{t^2+(2n+1)^2\pi^2}\right)\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^{+\infty} t^{s-1}\phi_N(t)\,\mathrm{d}t - \sum_{n=0}^{N-1}\int_0^{+\infty} \frac{2t^s}{t^2+(2n+1)^2\pi^2}\,\mathrm{d}t$$

Or
$$\int_0^{+\infty} \frac{2t^s}{t^2+(2n+1)^2\pi^2}\,\mathrm{d}t = 2I((2n+1)\pi, s) = \frac{(2n+1)^{s-1}\pi^s}{\cos(\frac{\pi}{2}s)}$$

donc
$$\sum_{n=0}^{N-1}\int_0^{+\infty} \frac{2t^s}{t^2+(2n+1)^2\pi^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi^s K_N(1-s)}{\cos(\frac{\pi}{2}s)}.$$

De plus,
$$\int_0^{+\infty} t^{s-1}\phi_N(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^{+\infty} t^{s-1}\frac{1}{\pi}\operatorname{Arctan}\frac{(2N+1)\pi}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}J((2N+1)\pi, s) = \frac{(2N+1)^s\pi^s}{2s\cos(\frac{\pi}{2}s)}$$

donc
$$\pi^{-s}\cos(\tfrac{\pi}{2}s)\,\Gamma(s)\,f(s) \leqslant \frac{(2N+1)^s}{2s} - K_N(1-s).$$

En changeant $2N+1$ en $2N-1$, on obtient la minoration demandée.

Quand N est grand,
$$\frac{(2N\pm1)^s}{2s} \sim \frac{N^s}{s\,2^{1-s}}.$$

Par ailleurs, en remplaçant s par $1-s$ dans I.B.3,
$$K_N(1-s) - \frac{N^s}{s\,2^{1-s}} \sim (1-2^{s-1})\,\zeta(1-s)$$

donc les deux extrêmités de l'encadrement tendent vers $-(1-2^{s-1})\,\zeta(1-s)$. En passant à la limite sur N, on a donc
$$\pi^{-s}\cos(\tfrac{\pi}{2}s)\,\Gamma(s)\,f(s) = -(1-2^{s-1})\,\zeta(1-s)$$

et comme $f(s) = (1-2^{1-s})\,\zeta(s)$, on en tire (E).

III.B.1. Voir le cours pour la classe $\mathscr{C}^1$ de Γ (si :-).

Posons $\delta_n : t \mapsto \begin{cases}(1-t/n)^n \ln t & \text{si } t \in\,]0,n]\\ 0 & \text{si } t > n.\end{cases}$

Appliquons le théorème de convergence dominée à la suite de fonctions (δ_n).

Les δ_n sont continues sur $\mathbb{R}_+^*$; la suite de fonctions (δ_n) converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers $\delta : t \mapsto e^{-t}\ln t$; la fonction δ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$; d'après l'énoncé, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t > 0$, $|\delta_n(t)| \leqslant e^{-t}\,|\ln t|$, où $t \mapsto e^{-t}\,|\ln t|$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$. Le théorème de convergence dominée s'applique : les δ_n et δ sont intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$, et $\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\delta_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty}\delta(t)\,\mathrm{d}t$. Comme $\Gamma'(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln t\,\mathrm{d}t$,
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \ln t\,\mathrm{d}t = \Gamma'(1).$$

III.B.2. En posant $t = n\,u$,
$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln t\,\mathrm{d}t = n\int_0^1 (1-u)^n \ln(n\,u)\,\mathrm{d}u$$
$$= n\ln n\int_0^1 (1-u)^n\,\mathrm{d}u + n\int_0^1 (1-u)^n \ln u\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{n}{n+1}\ln n + n\int_0^1 (1-u)^n \ln u\,\mathrm{d}u.$$

Par ailleurs, en intégrant par parties,
$$\int_0^1 (1-u)^n \ln u\,\mathrm{d}u$$
$$= \left[\frac{1-(1-u)^{n+1}}{n+1}\ln u\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1-(1-u)^{n+1}}{(n+1)\,u}\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{-1}{n+1}\int_0^1 \frac{1-(1-u)^{n+1}}{1-(1-u)}\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{-1}{n+1}\int_0^1 \sum_{k=0}^n (1-u)^k\,\mathrm{d}u$$
$$= \frac{-1}{n+1}\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} = \frac{-1}{n+1}H_{n+1}(1).$$

Ainsi,
$$\int_0^n \left(1-\frac{t}{n}\right)^n \ln t\,\mathrm{d}t = \frac{n}{n+1}\ln n - \frac{n}{n+1}H_{n+1}(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -U(1) = -\gamma.$$

On a bien $\Gamma'(1) = -\gamma$.

III.B.3. En remplaçant s par $1-s$ dans (E) on a
$$\zeta(s) = 2\,(2\pi)^{s-1}\cos(\tfrac{\pi}{2}(1-s))\,\Gamma(1-s)\,\zeta(1-s).$$

Quand s est au voisinage de 0, on a
$$(2\pi)^s = 1 + s\ln(2\pi) + \mathrm{o}(s),$$
$$\cos(\tfrac{\pi}{2}(1-s)) = \sin(\tfrac{\pi}{2}s) = \tfrac{\pi}{2}s + \mathrm{o}(s^2),$$
$$\Gamma(1-s) = \Gamma(1) - \Gamma'(1)\,s + \mathrm{o}(s) = 1 + \gamma\,s + \mathrm{o}(s),$$
$$\zeta(1-s) = -1/s + \gamma + \mathrm{o}(1).$$

Ainsi, $\zeta(s) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\ln(2\pi)\,s + \mathrm{o}(s)$.