

Deuxième devoir à la maison

[E3A16]

L'usage de calculatrices est interdit*La question étoilée est réservée aux 5/2 et aux 3/2 aventureux.*Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels.Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$b_n = n(a_n - a_{n+1}), \quad A_n = \sum_{k=1}^n a_k \text{ et } B_n = \sum_{k=1}^n b_k$$

1. On prend dans cette question, pour tout $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

1.1 Vérifier que $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge et calculer sa somme.**1.2** * Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 1} n x^{n-1}$.**1.3** Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge et calculer sa somme.**2.** On prend dans cette question, $a_n = \frac{1}{n \ln(n)}$, $n \geq 2$ et $a_1 = 0$.**2.1** Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(a_n)_{n \geq 2}$.**2.2** Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} a_n$?**2.3** Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n$.**2.4** Quelle est la nature de la série $\sum_{n \geq 1} b_n$?**3.** On suppose dans cette question que la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite décroissante de réels positifs.**3.1** Pour tout entier naturel n non nul, on note

$$u_n = \sum_{p=n+1}^{2n} a_p. \text{ Montrer que :}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad n a_{2n} \leq u_n.$$

3.2 En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_{2n}$.**3.3** Démontrer alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n = 0$.**3.4** Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge.**3.5** A-t-on $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$?**4.** On suppose dans cette question que la série $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge et que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est positive, décroissante et de limite nulle.**4.1** Vérifier que :

$$\forall m \in \mathbb{N}^*, \quad m \leq n, \quad B_n \geq A_m - m a_{n+1}.$$

4.2 En déduire que $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge.**4.3** Peut-on en déduire que $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n$?