

Corrigé du deuxième devoir à la maison

1.1. La série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge, comme série géométrique de raison $\frac{1}{2}$. De plus,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2.$$

1.2.* On reconnaît la série entière dérivée de $\sum_{n \geq 0} x^n$, donc d'après le cours, elle a le même rayon de convergence :

le rayon de convergence cherché vaut 1.

1.3. Pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$b_n = n \left(\frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{2^n} \right) = \frac{n}{2^n} \ll \frac{1}{n^2},$$

donc la série $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge.

De plus, en manipulant les sommes partielles,

$$\sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^n \frac{k}{2^k} = \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^k \frac{1}{2^k},$$

en constatant que $k = \sum_{p=1}^k 1$. Alors, en permutant les sommes finies,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n b_k &= \sum_{p=1}^n \sum_{k=p}^n \frac{1}{2^k} = \sum_{p=1}^n \frac{\frac{1}{2^p} - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= 2 \sum_{p=1}^n \frac{1}{2^p} - 2 \sum_{p=1}^n \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= \sum_{p=1}^n \frac{1}{2^{p-1}} - \frac{n}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2, \end{aligned}$$

donc $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = 2$.

2.1. Puisque les suites $(n)_{n \geq 2}$ et $(\ln n)_{n \geq 2}$ sont positives et croissent vers $+\infty$,

la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ décroît vers 0.

2.2. De même, la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{t \ln t}$ est continue et décroissante sur $[2, +\infty[$. Faisons une comparaison série-intégrale. Grâce à la décroissance de f , pour $n \geq 2$,

$$a_n = f(n) \geq \int_n^{n+1} f(t) dt,$$

donc

$$\sum_{k=2}^n a_k \geq \sum_{k=2}^n \int_k^{k+1} f(t) dt = \int_2^{n+1} f(t) dt.$$

Or

$$\begin{aligned} \int_2^{n+1} \frac{dt}{t \ln t} &= \left[\ln \ln t \right]_2^{n+1} = \ln \ln(n+1) - \ln \ln 2 \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty. \end{aligned}$$

Donc $\sum_{n \geq 1} a_n$ diverge.

2.3. Clairement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_n = 0$.

2.4. Pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} b_n &= n a_n - n a_{n+1} \\ &= n a_n - (n+1) a_{n+1} + a_{n+1}. \end{aligned}$$

Or la série $\sum_{n \geq 1} (n a_n - (n+1) a_{n+1})$ est de même nature que la suite $(n a_n)_{n \geq 1}$, qui converge, donc cette série converge. En revanche, la série $\sum_{n \geq 1} a_{n+1}$ diverge, d'après la question 2.b.

Donc la série $\sum_{n \geq 1} b_n$ diverge.

3.1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme la suite $(a_p)_{p \geq 1}$ décroît, pour tout $p \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$, $a_p \geq a_{2n}$. En sommant ces inégalités membre à membre, on obtient

$$\sum_{p=n+1}^{2n} a_p \geq \sum_{p=n+1}^{2n} a_{2n},$$

ou encore, $u_n \geq n a_{2n}$.

3.2. Puisque la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge, on peut introduire ses restes, définis pour $n \geq 1$ par

$$R_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} a_p.$$

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$. Alors,

$$u_n = \sum_{p=n+1}^{+\infty} a_p - \sum_{p=2n+1}^{+\infty} a_p = R_n - R_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Alors, par majoration, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n a_{2n} = 0$.

3.3. Bien-sûr, on en tire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2n a_{2n} = 0$. En outre, par décroissance de $(a_n)_{n \geq 1}$, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} (2n+1) a_{2n+1} &\leq (2n+1) a_{2n} \\ &= 2n a_{2n} + a_{2n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

d'après la limite précédente d'une part, et d'autre part, parce que $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{2n} = 0$ puisque $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge. Alors, comme ses deux suites extraites d'indices pairs et impairs convergent vers 0,

la suite $(n a_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0.

3.4. Comme à la question 2.4, pour $n \geq 1$,

$$b_n = n a_n - (n+1) a_{n+1} + a_{n+1},$$

où la série $\sum_{n \geq 1} (n a_n - (n+1) a_{n+1})$ converge. Mais ici, la série $\sum_{n \geq 1} a_{n+1}$ converge par hypothèse, donc

la série $\sum_{n \geq 1} b_n$ converge.

3.5. De plus, pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n b_k &= \sum_{k=1}^n (k a_k - (k+1) a_{k+1} + a_{k+1}) \\
 &= \sum_{k=1}^n (k a_k - (k+1) a_{k+1}) + \sum_{k=1}^n a_{k+1} \\
 &= a_1 - (n+1) a_{n+1} + \sum_{k=2}^{n+1} a_k \\
 &= \sum_{k=1}^{n+1} a_k - (n+1) a_{n+1}.
 \end{aligned}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) a_{n+1} = 0$, à la limite on a

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} b_n = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n. \right.$$

4.1. Soient deux entiers tels que $n \geq m \geq 1$. D'après le calcul précédent,

$$\begin{aligned}
 B_n &= \sum_{k=1}^n b_k = \sum_{k=1}^{n+1} a_k - (n+1) a_{n+1} \\
 &= \sum_{k=1}^m a_k + \sum_{k=m+1}^{n+1} a_k - (n+1) a_{n+1}
 \end{aligned}$$

Comme $n \geq m$ et que la suite (a_n) est décroissante et positive, pour tout $k \in \llbracket m+1, n+1 \rrbracket$, $a_k \geq a_{n+1}$.

Donc

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=m+1}^{n+1} a_k &\geq \sum_{k=m+1}^{n+1} a_{n+1} \\
 &= (n+1 - (m+1) + 1) a_{n+1} \\
 &= (n+1 - m) a_{n+1}
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \left| B_n \geq \sum_{k=1}^m a_k + (n+1 - m) a_{n+1} - (n+1) a_{n+1} \right. \\
 \left. = \underline{A_m - m a_{n+1}}. \right.
 \end{aligned}$$

4.2. Fixons m et faisons tendre n vers $+\infty$. Comme $\sum b_n$ converge, $\lim_{n \rightarrow +\infty} B_n = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k$. Notons B cette somme. De plus, par hypothèse, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = 0$. Alors, en passant à la limite sur n dans la majoration précédente, $A_m \leq B$. Cela signifie que les sommes partielles de la série $\sum_{k \geq 1} a_k$ sont majorées, et comme cette série est à termes positifs,

$$\left| \sum_{k \geq 1} a_k \text{ converge.} \right.$$

4.3. Ainsi, la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est décroissante et positive, et la série $\sum_{n \geq 1} a_n$ converge. On est ramené aux hypothèses de la question 3 et l'on en déduit que la suite $(n a_n)_{n \geq 1}$ converge vers 0. Alors, de l'égalité $B_n = A_{n+1} - (n+1) a_{n+1}$ tirée de la question 3.5, on déduit qu'à la limite sur n ,

$$\left| \sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} b_n. \right.$$