Vingtième devoir à la maison

Premier exercice
[CCP16]

Soient un espace vectoriel E et un entier $p \geqslant 2$. Considérons une famille $(f_1, \dots, f_p)$ d'endomorphismes de E tels que $\sum_{i=1}^{p} f_i = \mathrm{id}_E$ et

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2,\ i \neq j \Longrightarrow f_i \circ f_j = 0.$$

1. Montrer que les f_i sont des projecteurs de E

2. Montrer que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} \mathrm{Im}(f_i)$.

Second exercice
[E3A14]

On désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit n un entier naturel non nul. On pose $E = \mathbb{K}^n$ et l'on considère un endomorphisme u de E tel que $u^2 = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{Im}(u) \subset \mathrm{Ker}(u)$.

2. Quelle inégalité obtient-on ainsi sur le rang de u ? On citera précisément le théorème utilisé.

3. On suppose ici que $n = 2$, soit $E = \mathbb{K}^2$. On suppose aussi u non nul.

a. Montrer qu'il existe une droite D dans E telle que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Im}(u) = D$.

b. Soit v un endomorphisme de E tel que $v^2 = 0$ et $u \circ v = v \circ u$.

i. Montrer que $v(D) \subset D$.

ii. Montrer que $u \circ v = 0$.

c. Soient v et w deux endomorphismes de E tels que $v^2 = 0$, $w^2 = 0$, $u \circ v = v \circ u$ et $u \circ w = w \circ u$. Montrer que $v \circ w = 0$.

4. On revient au cas général. Soit $m \geqslant 2$ un entier naturel. Soient $u_1, \dots, u_m$ des endomorphismes de E tels que

$$\forall (i,j) \in [\![1,m]\!]^2,\ u_i^2 = 0 \text{ et } u_i \circ u_j = u_j \circ u_i.$$

On pose $F_1 = \mathrm{Im}(u_1)$ et

$$\forall i \in [\![2,m]\!],\ F_i = \mathrm{Im}(u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_i).$$

a. Montrer que

$$\forall i \in [\![1,m-1]\!],\ u_{i+1}(F_i) \subset F_i.$$

b. En déduire que

$$\forall i \in [\![1,m]\!],\ \dim(F_i) \leqslant \frac{n}{2^i}.$$

c. Dans le cas où $n < 2^m$, montrer que

$$u_1 \circ u_2 \circ \cdots \circ u_m = 0.$$