

# Corrigé du vingtième devoir à la maison

## Premier exercice

**1.** MONTRONS QUE les  $f_i$  sont des projecteurs de  $E$ .

Soit  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . En composant la première relation par  $f_j$ , on a  $(\sum_{i=1}^p f_i) \circ f_j = \text{id}_E \circ f_j$ , c'est-à-dire  $\sum_{i=1}^p f_i \circ f_j = f_j$ . Grâce à la seconde relation, pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  tel que  $i \neq j$ ,  $f_i \circ f_j = 0$ , donc il reste  $f_j \circ f_j = f_j$ , ce qui signifie que

$|$  les  $f_j$  sont des projecteurs de  $E$ .

**2.** MONTRONS QUE  $E = \sum_{i=1}^p \text{Im}(f_i)$ .

Bien entendu,  $\sum_{i=1}^p \text{Im}(f_i) \subset E$  puisque les  $\text{Im}(f_i)$  sont des sous-espaces vectoriels de  $E$ .

Et en évaluant la première relation en un  $x \in E$  quelconque,  $\sum_{i=1}^p f_i(x) = x$ , où pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $f_i(x) \in \text{Im}(f_i)$ . Cela signifie que  $x \in \sum_{i=1}^p \text{Im}(f_i)$ . Donc  $E \subset \sum_{i=1}^p \text{Im}(f_i)$ .

Alors,  $E = \sum_{i=1}^p \text{Im}(f_i)$ .

MONTRONS QUE la somme est directe.

Pour cela, montrons que 0 n'y admet que la décomposition triviale. Supposons que l'on ait  $0 = \sum_{i=1}^p x_i$ , où  $x_i \in \text{Im}(f_i)$  pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ . Comme  $f_i$  est un projecteur de  $E$ ,  $x_i = f_i(x_i)$ . Alors, pour  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= f_j(0) = f_j\left(\sum_{i=1}^p x_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^p f_j(x_i) = \sum_{i=1}^p f_j \circ f_i(x_i) \\ &= f_j \circ f_j(x_j) = f_j(x_j) = x_j. \end{aligned}$$

Ainsi, dans la décomposition  $0 = \sum_{i=1}^p x_i$ , les  $x_i$  sont tous nuls, donc 0 n'admet que la décomposition triviale, et la somme est directe.

FINALEMENT,  $| E = \bigoplus_{i=1}^p \text{Im}(f_i)$ .

## Second exercice

**1.** Soit  $x \in \text{Im}(u)$  : il existe  $y \in E$  tel que  $x = u(y)$ . Alors  $u(x) = u(u(y)) = u^2(y) = 0$ , et  $x \in \text{Ker}(u)$ .

$|$  Ainsi,  $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$ .

**2.** D'après le théorème du rang, puisque  $E$  est de dimension finie,  $\dim(E) = \text{rg}(u) + \dim(\text{Ker}(u))$ . Or d'une part,  $\text{rg}(u) = \dim(\text{Im}(u))$  et d'autre part,  $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$  donc  $\text{rg}(u) \leq \dim(\text{Ker}(u))$ . Alors,  $\dim(E) \geq \text{rg}(u) + \text{rg}(u)$  et

$| \text{rg}(u) \leq \frac{1}{2} \dim(E)$ .

**3.a.** Puisque  $\dim(E) = 2$ ,  $\text{rg}(u) \leq 1$ . Mais  $\text{rg}(u)$  est entier puisque c'est une dimension. Et  $u \neq 0$  donc  $\text{Im}(u) \neq \{0\}$  et  $\text{rg}(u) \neq 0$ , d'où  $\text{rg}(u) \geq 1$  et donc  $\text{rg}(u) = 1$  et  $\text{Im}(u)$  est une droite. Alors  $\dim(\text{Ker}(u)) = \dim(E) - \text{rg}(u) = 1$ . Et comme  $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$  et que  $\dim(\text{Ker}(u)) = \text{rg}(u) = 1$ ,

$|$  il existe bien une droite  $D$  de  $E$  telle que  $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u) = D$ .

**3.b.i.** Soit  $x \in D$ . Comme  $D = \text{Im}(u)$ , il existe  $y \in E$  tel que  $x = u(y)$ . Alors

$$v(x) = v(u(y)) = v \circ u(y) = u \circ v(y) = u(v(y)),$$

où l'on voit que  $v(x) \in \text{Im}(u) = D$ . Ainsi,  $| v(D) \subset D$ .

**3.b.ii.** Il s'ensuit que  $D \subset \text{Ker}(v)$ . Si  $v = 0$ , bien sûr  $u \circ v = 0$ . Si  $v \neq 0$ , comme à la question 3.a,  $\text{Ker}(v) = \text{Im}(v)$  et  $\dim \text{Ker}(v) = 1$ , donc  $D = \text{Ker}(v)$ . Comme  $D = \text{Im}(u)$ ,  $| u \circ v = v \circ u = 0$ .

**3.c.** Sur le même principe, si  $w = 0$ , clairement  $v \circ w = 0$ , et sinon,  $D = \text{Ker}(w) = \text{Im}(w)$ , donc  $| v \circ w = 0$ .

**4.a.** Pour condenser les écritures, écrivons

$$u_1 \circ \cdots \circ u_i = \prod_{j=1}^i u_j.$$

Cette écriture est raisonnable, car les  $u_j$  commutent deux à deux entre eux.

Soit  $x \in F_i = \text{Im}(\prod_{j=1}^i u_j)$  : il existe  $y \in E$  tel que  $x = (\prod_{j=1}^i u_j)(y)$ . Puisque les  $u_j$  commutent entre eux,

$$\begin{aligned} u_{i+1}(x) &= u_{i+1}\left(\left(\prod_{j=1}^i u_j\right)(y)\right) \\ &= u_{i+1} \circ \left(\prod_{j=1}^i u_j\right)(y) \\ &= \left(\prod_{j=1}^i u_j\right) \circ u_{i+1}(y) \\ &= \left(\prod_{j=1}^i u_j\right)(u_{i+1}(y)) \in F_i, \end{aligned}$$

$|$  donc  $u_{i+1}(F_i) \subset F_i$ .

**4.b.** Raisonnons par récurrence sur  $i$ .

INITIALISATION. Comme  $u_1^2 = 0$ , d'après la question 2,  $\text{rg}(u_1) \leq \frac{1}{2} \dim(E)$ , c'est-à-dire, puisque  $F_1 = \text{Im}(u_1)$ ,  $\dim(F_1) \leq n/2$ .

HÉRÉDITÉ. Supposons que  $\dim(F_i) \leq n/2^i$ . Puisque  $u_{i+1}(F_i) \subset F_i$ , la restriction

$$v_{i+1} : F_i \rightarrow F_i, x \mapsto u_{i+1}(x)$$

est bien définie. Puisque  $u_{i+1}^2 = 0$ , par restriction, on a aussi  $v_{i+1}^2 = 0$ . Alors, toujours d'après la question 2 et par l'hypothèse de récurrence,

$$\text{rg}(v_{i+1}) \leq \frac{1}{2} \dim(F_i) \leq n/2^{i+1}.$$

En outre,  $\text{Im}(v_{i+1}) = F_{i+1}$  : en effet, et grâce à la commutativité des  $u_j$ ,

$$\begin{aligned} x &\in \text{Im}(v_{i+1}) \\ \iff \exists y &\in F_i, x = v_{i+1}(y) = u_{i+1}(y), \\ \iff \exists z &\in E, x = u_{i+1} \circ \left(\prod_{j=1}^i u_j\right)(z) \\ &= \left(\prod_{j=1}^{i+1} u_j\right)(z) \\ \iff x &\in F_{i+1}. \end{aligned}$$

Alors,  $\dim(F_{i+1}) = \text{rg}(v_{i+1}) \leq n/2^{i+1}$ .

CONCLUSION. Par récurrence, on a prouvé que

$|$  pour tout  $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$ ,  $\dim(F_i) \leq n/2^i$ .

**4.c.** Si  $n < 2^m$ ,  $\dim(F_m) \leq n/2^m < 1$ , donc  $\dim(F_m) = 0$ , car  $\dim(F_m) \in \mathbb{N}$ . Alors,  $F_m = \{0\}$

$|$  et  $\prod_{j=1}^m u_j = 0$ .