

Corrigé du vingtième devoir à la maison

Premier exercice

1. MONTRONS QUE les f_i sont des projecteurs de E .

Soit $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$. En composant la première relation par f_j , on a $(\sum_{i=1}^p f_i) \circ f_j = \text{id}_E \circ f_j$, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^p f_i \circ f_j = f_j$. Grâce à la seconde relation, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ tel que $i \neq j$, $f_i \circ f_j = 0$, donc il reste $f_j \circ f_j = f_j$, ce qui signifie que

les f_j sont des projecteurs de E .

2. MONTRONS QUE $E = \sum_{i=1}^p \text{Im}(f_i)$.

Bien entendu, $\sum_{i=1}^p \text{Im}(f_i) \subset E$ puisque les $\text{Im}(f_i)$ sont des sous-espaces vectoriels de E .

Et en évaluant la première relation en un $x \in E$ quelconque, $\sum_{i=1}^p f_i(x) = x$, où pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $f_i(x) \in \text{Im}(f_i)$. Cela signifie que $x \in \sum_{i=1}^p \text{Im}(f_i)$. Donc $E \subset \sum_{i=1}^p \text{Im}(f_i)$.

Alors, $E = \sum_{i=1}^p \text{Im}(f_i)$.

MONTRONS QUE la somme est directe.

Pour cela, montrons que 0 n'y admet que la décomposition triviale. Supposons que l'on ait $0 = \sum_{i=1}^p x_i$, où $x_i \in \text{Im}(f_i)$ pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Comme f_i est un projecteur de E , $x_i = f_i(x_i)$. Alors, pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$,

$$\begin{aligned} 0 &= f_j(0) = f_j\left(\sum_{i=1}^p x_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^p f_j(x_i) = \sum_{i=1}^p f_j \circ f_i(x_i) \\ &= f_j \circ f_j(x_j) = f_j(x_j) = x_j. \end{aligned}$$

Ainsi, dans la décomposition $0 = \sum_{i=1}^p x_i$, les x_i sont tous nuls, donc 0 n'admet que la décomposition triviale, et la somme est directe.

FINALEMENT, $E = \bigoplus_{i=1}^p \text{Im}(f_i)$.

Second exercice

1. Soit $x \in \text{Im}(u)$: il existe $y \in E$ tel que $x = u(y)$. Alors $u(x) = u(u(y)) = u^2(y) = 0$, et $x \in \text{Ker}(u)$.

Ainsi, $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$.

2. D'après le théorème du rang, puisque E est de dimension finie, $\dim(E) = \text{rg}(u) + \dim(\text{Ker}(u))$. Or d'une part, $\text{rg}(u) = \dim(\text{Im}(u))$ et d'autre part, $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$ donc $\text{rg}(u) \leq \dim(\text{Ker}(u))$. Alors, $\dim(E) \geq \text{rg}(u) + \text{rg}(u)$ et

$$\text{rg}(u) \leq \frac{1}{2} \dim(E).$$

3.a. Puisque $\dim(E) = 2$, $\text{rg}(u) \leq 1$. Mais $\text{rg}(u)$ est entier puisque c'est une dimension. Et $u \neq 0$ donc $\text{Im}(u) \neq \{0\}$ et $\text{rg}(u) \neq 0$, d'où $\text{rg}(u) \geq 1$ et donc $\text{rg}(u) = 1$ et $\text{Im}(u)$ est une droite. Alors $\dim(\text{Ker}(u)) = \dim(E) - \text{rg}(u) = 1$. Et comme $\text{Im}(u) \subset \text{Ker}(u)$ et que $\dim(\text{Ker}(u)) = \text{rg}(u) = 1$,

il existe bien une droite D de E telle que $\text{Ker}(u) = \text{Im}(u) = D$.

3.b.i. Soit $x \in D$. Comme $D = \text{Im}(u)$, il existe $y \in E$ tel que $x = u(y)$. Alors

$$v(x) = v(u(y)) = v \circ u(y) = u \circ v(y) = u(v(y)),$$

où l'on voit que $v(x) \in \text{Im}(u) = D$. Ainsi, $v(D) \subset D$.

3.b.ii. Il s'ensuit que $D \subset \text{Ker}(v)$. Si $v = 0$, bien-sûr $u \circ v = 0$. Si $v \neq 0$, comme à la question 3.a, $\text{Ker}(v) = \text{Im}(v)$ et $\dim \text{Ker}(v) = 1$, donc $D = \text{Ker}(v)$. Comme $D = \text{Im}(u)$, $u \circ v = v \circ u = 0$.

3.c. Sur le même principe, si $w = 0$, clairement $v \circ w = 0$, et sinon, $D = \text{Ker}(w) = \text{Im}(w)$, donc $v \circ w = 0$.

4.a. Pour condenser les écritures, écrivons

$$u_1 \circ \cdots \circ u_i = \prod_{j=1}^i u_j.$$

Cette écriture est raisonnable, car les u_j commutent deux à deux entre eux.

Soit $x \in F_i = \text{Im}(\prod_{j=1}^i u_j)$: il existe $y \in E$ tel que $x = (\prod_{j=1}^i u_j)(y)$. Puisque les u_j commutent entre eux,

$$\begin{aligned} u_{i+1}(x) &= u_{i+1}\left(\left(\prod_{j=1}^i u_j\right)(y)\right) \\ &= u_{i+1} \circ \left(\prod_{j=1}^i u_j\right)(y) \\ &= \left(\prod_{j=1}^i u_j\right) \circ u_{i+1}(y) \\ &= \left(\prod_{j=1}^i u_j\right)(u_{i+1}(y)) \in F_i, \end{aligned}$$

donc $u_{i+1}(F_i) \subset F_i$.

4.b. Raisonnons par récurrence sur i .

INITIALISATION. Comme $u_1^2 = 0$, d'après la question 2, $\text{rg}(u_1) \leq \frac{1}{2} \dim(E)$, c'est-à-dire, puisque $F_1 = \text{Im}(u_1)$, $\dim(F_1) \leq n/2$.

HÉRÉDITÉ. Supposons que $\dim(F_i) \leq n/2^i$. Puisque $u_{i+1}(F_i) \subset F_i$, la restriction

$$v_{i+1} : F_i \rightarrow F_i, \quad x \mapsto u_{i+1}(x)$$

est bien définie. Puisque $u_{i+1}^2 = 0$, par restriction, on a aussi $v_{i+1}^2 = 0$. Alors, toujours d'après la question 2 et par l'hypothèse de récurrence,

$$\text{rg}(v_{i+1}) \leq \frac{1}{2} \dim(F_i) \leq n/2^{i+1}.$$

En outre, $\text{Im}(v_{i+1}) = F_{i+1}$: en effet, et grâce à la commutativité des u_j ,

$$\begin{aligned} x &\in \text{Im}(v_{i+1}) \\ \iff \exists y \in F_i, \quad x &= v_{i+1}(y) = u_{i+1}(y), \\ \iff \exists z \in E, \quad x &= u_{i+1} \circ \left(\prod_{j=1}^i u_j\right)(z) \\ &= \left(\prod_{j=1}^{i+1} u_j\right)(z) \\ \iff x &\in F_{i+1}. \end{aligned}$$

Alors, $\dim(F_{i+1}) = \text{rg}(v_{i+1}) \leq n/2^{i+1}$.

CONCLUSION. Par récurrence, on a prouvé que

pour tout $i \in \llbracket 1, m \rrbracket$, $\dim(F_i) \leq n/2^i$.

4.c. Si $n < 2^m$, $\dim(F_m) \leq n/2^m < 1$, donc $\dim(F_m) = 0$, car $\dim(F_m) \in \mathbb{N}$. Alors, $F_m = \{0\}$

et $\prod_{j=1}^m u_j = 0$.