Vingt-deuxième devoir à la maison

Les matrices de Kac

[CCINP20]

Notations

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels et $\mathbf{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients complexes.
- Dans tout ce problème, les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ seront notés en colonnes.
- La lettre i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $i^2 = -1$. On s'interdira d'utiliser cette lettre pour tout autre usage !

Objectifs

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés spectrales de deux matrices $A_n \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et $B_n \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ introduites par Mark Kac au milieu du XX$^{\text{e}}$ siècle. Ces liens ont été mis en évidence par Alan Edelman et Eric Kostlan au début des années 2000.

Partie I - La dimension 3

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Q1. Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_A = \det(X\, I_3 - A)$ de A et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

Q2. En déduire que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Donner la liste des valeurs propres de A et la dimension des espaces propres correspondants. *On ne demande pas de déterminer les espaces propres de A dans cette question.*

Q3. Déterminer le polynôme caractéristique χ_B de B et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$. Vérifier que $\chi_A(X) = i\,\chi_B(i\,X)$.

Q4. La matrice B est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Donner la liste des valeurs propres réelles puis complexes de B et la dimension des espaces propres sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ correspondants. *On ne demande pas de déterminer les espaces propres de B dans cette question.*

On considère :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{C}).$$

Q5. Exprimer $D^{-1} A\, D$ à l'aide de la matrice B.

Soit $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_3(\mathbb{R})$.

Q6. Calculer $\Delta^{-1} A\, \Delta$. En déduire à nouveau que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Partie II - Étude d'un endomorphisme

Objectifs

Dans cette **partie**, on introduit la matrice B_n et on en étudie ses propriétés spectrales à l'aide d'un endomorphisme de dérivation.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_k(x) = \cos^k(x) \sin^{n-k}(x).$$

On note V_n le $\mathbb{C}$-espace vectoriel défini par :

$$V_n = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(f_0, f_1, \ldots, f_n) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} \lambda_k\, f_k \mid (\lambda_0, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \right\}.$$

Q7. Montrer que la famille $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est libre. En déduire la dimension de l'espace vectoriel complexe V_n.

Q8. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, montrer que $f_k' \in V_n$. En déduire que :

$$\varphi_n : \begin{array}{rcl} V_n & \to & V_n \\ f & \mapsto & \varphi_n(f) = f' \end{array}$$

définit un endomorphisme de V_n et que sa matrice B_n dans la base $(f_0, f_1, \ldots, f_n)$ est la matrice :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Pour $k \in [\![0, n]\!]$, on note $g_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $g_k(x) = e^{i(2k-n)x}$.

Q9. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_k(x) = (\cos x + i \sin x)^k (\cos x - i \sin x)^{n-k}.$$

Q10. En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton, que : $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $g_k \in V_n$.

Q11. Pour $k \in [\![0, n]\!]$, calculer g_k'. En déduire que φ_n est diagonalisable. Donner la liste des valeurs propres complexes de φ_n et décrire les espaces propres correspondants.

Q12. Pour quelles valeurs de n l'endomorphisme φ_n est-il un automorphisme de V_n ?

Q13. Écrire la décomposition de g_n dans la base $(f_0, \ldots, f_n)$ et en déduire que :

$$\mathrm{Ker}(B_n - i\,n\,I_{n+1}) = \mathrm{Vect} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix},$$

où pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note $q_k = i^{n-k} \dbinom{n}{k}$.