Corrigé du vingt-troisième devoir à la maison

QC1. D'après le cours,

$\dim \mathscr{E} = n^2$ et $(E_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathscr{E}$.

QC2. D'après le cours, $E_{i,j}\,E_{k,\ell} = \delta_{jk}\,E_{i,\ell}$, en utilisant le symbole de Kronecker.

QC3. Le polynôme caractéristique d'une matrice carrée en est un polynôme annulateur.

QC4. Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{K}$.

I.1. Non. En effet, A est nilpotente donc il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = O_n$, d'où $\det(A^p) = 0$ et $\det(A) = 0$.

I.2. Comme $A^p = O_n$, le polynôme X^p est annulateur de A. Parmi ses racines figurent les valeurs propres de A, donc la seule possible est 0. Comme A n'est pas inversible, 0 est effectivement valeur propre de A.

Donc $\mathrm{Sp}(A) = \{0\}$ et $\chi_A = X^n$.

I.3. Alors, A est diagonalisable si et seulement si le polynôme $\prod_{\lambda\in\mathrm{Sp}(A)}(X-\lambda)$ est annulateur, c'est-à-dire si X est annulateur, c'est-à-dire $A = O_n$.

I.4. Oui, car toute matrice de $\mathrm{Vect}(A)$ s'écrit $\lambda\,A$, où $\lambda \in \mathbb{R}$, donc $(\lambda\,A)^p = \lambda^p\,A^p = O_n$ et $\lambda\,A$ est nilpotente.

I.5. Oui, car $(A^\top)^p = (A^p)^\top = O_n$.

I.6. Si M est semblable à A, elle représente le même endomorphisme que A. Donc M^p représente le même endomorphisme que $A^p = O_n$, donc $M^p = O_n$ et M est nilpotente.

I.7. Puisque $\chi_A = X^n$ et d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $A^n = O_n$.

I.8. Oui !

Commentaire. Comme le suggère l'énoncé, dorénavant, nous utiliserons implicitement ce résultat.

I.9. Oui, car χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.

Comme A n'est pas inversible, $\mathrm{rg}(A) \leqslant n-1$. En outre, en prenant

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ (0) & & & 0 \end{pmatrix},$$

clairement $\chi_A = X^n$ donc $A^n = O_n$, A est nilpotente et de rang $n-1$.

Le rang maximal d'une matrice nilpotente est $n-1$.

I.10.1. Comme $B\,C \in \mathscr{N}$, $(B\,C)^n = O_n$, donc $C\,(B\,C)^n\,B = O_n$, c'est-à-dire $(C\,B)^{n+1} = O_n$ et

$C\,B \in \mathscr{N}$.

I.10.2. Comme A et B commutent,

$$(A\,B)^n = A^n\,B^n = O_n.$$

Et d'après le binôme de Newton,

$$\begin{aligned}(A+B)^{2n} &= \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}A^k\,B^{2n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}A^k\,B^{2n-k} + \sum_{k=n+1}^{2n}\binom{2n}{k}A^k\,B^{2n-k}.\end{aligned}$$

Dans la première somme $2n-k \geqslant n$ donc $B^{2n-k} = O_n$; dans la seconde, $k \geqslant n$ donc $A^k = O_n$. Alors $(A+B)^{2n} = O_n$.

$A\,B$ et $A+B$ sont nilpotentes.

I.11. Une matrice symétrique réelle est diagonalisable. Si elle est nilpotente, elle est nulle d'après la question 3.

Seule la matrice nulle est à la fois symétrique réelle et nilpotente.

I.12.1. Comme $A^\top = -A$, $(A^2)^\top = (A^\top)^2 = A^2$, donc A^2 est symétrique réelle, et nilpotente car $(A^2)^n = A^{2n} = O_n$. D'après la question précédente,

$A^2 = O_n$.

I.12.2. Alors $\mathrm{Tr}(A^2) = 0$. Mais aussi, $\mathrm{Tr}(A^2) = -\mathrm{Tr}(A^\top A) = -\|A\|^2$, où l'on a reconnu la norme euclidienne usuelle dans $\mathscr{E}$. Donc $\|A\| = 0$ et $A = O_n$.

Seule la matrice nulle est à la fois antisymétrique et nilpotente.

II.1.1. Comme M est triangulaire supérieure, ses valeurs propres figurent sur sa diagonale, donc

$\mathrm{Sp}(M) = \{0\}$.

En outre, clairement $\mathrm{rg}(M) = n-1$ donc $\dim E_0(M) = 1$. Enfin, puisque la première colonne de M est nulle,

$$E_0(M) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

II.1.2. Clairement, S est symétrique non nulle, donc d'après la question I.11, $\boxed{S \notin \mathscr{N}.}$

Notons J la matrice remplie de 1, de sorte que $S = J - I_n$. Puisque J et I_n commutent et que $J^2 = n\,J$,

$$\begin{aligned} S^2 &= J^2 - 2\,J + I_n = (n-2)\,J + I_n \\ &= (n-2)\,(S + I_n) + I_n = (n-2)\,S + (n-1)\,I_n. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{S^2 \in \mathrm{Vect}(S, I_n).}$

De plus, le polynôme $X^2 - (n-2)\,X - (n-1)$ est annulateur de S, donc parmi ses racines, -1 et $n-1$, figurent les valeurs propres de S. Mais S est diagonalisable et n'est pas colinéaire à I_n, donc elle a au moins deux valeurs propres. Ainsi,

$\boxed{\mathrm{Sp}(S) = \{-1, n-1\}.}$

Enfin, si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $S\,X = -\,X \iff \sum_{i=1}^n x_i = 0$, donc $E_{-1}(S)$ est l'hyperplan d'équation $\sum_{i=1}^n x_i = 0$; et puisque les sous-espaces propres de S sont orthogonaux, car S est symétrique réelle, $E_{n-1}(S)$ est engendré par le vecteur colonne rempli de 1, qui est normal à l'hyperplan précédent.

II.1.3. $\boxed{\text{Non,}}$ car l'on vient d'exhiber deux matrices nilpotentes, M et $M^\top$, dont la somme, S, n'est pas nilpotente.

II.2.1. D'après le théorème de Cayley-Hamilton, $M^2 - \mathrm{Tr}(M)\,M + \det(M)\,I_2 = 0$. Et comme $\mathrm{rg}(M) = 1$, $\det(M) = 0$ et $\boxed{M^2 = \mathrm{Tr}(M)\,M.}$

$\boxed{\text{Si } \mathrm{Tr}(M) \neq 0,}$ alors le polynôme $X\,(X - \mathrm{Tr}(M))$ annulateur de M est scindé à racines simples, donc $\underline{M \text{ est diagonalisable.}}$

$\boxed{\text{Si } \mathrm{Tr}(M) = 0,}$ alors $M^2 = 0$ et $\underline{M \text{ est nilpotente.}}$

II.2.2. La matrice $\boxed{A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}$ convient.

II.2.3. Soit A nilpotente : $A^2 = O_2$, donc $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et $\det(A) = 0$. Alors elle s'écrit

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & -a \end{pmatrix},$$

avec $a^2 - b\,c = 0$. Réciproquement, si A a cette forme, $\mathrm{Tr}(A) = \det(A) = 0$ et $A^2 = O_2$.

$$\boxed{\text{L'ensemble des matrices nilpotentes de taille 2 est } \left\{\begin{pmatrix} a & c \\ b & -a \end{pmatrix} \,\middle|\, a^2 = b\,c\right\}.}$$

III.1. Comme la trace est une forme linéaire non nulle, $T_0 = \mathrm{Ker}(\mathrm{Tr})$ est un hyperplan de $\mathscr{E}$, donc

$\boxed{\dim(T_0) = n^2 - 1.}$

III.2. Comme on l'a vu, toute matrice A de $\mathscr{N}$ vérifie $\chi_A = X^n$, donc $\mathrm{Tr}(A) = 0$, car c'est, au signe près, le coefficient de X^{n-1} dans χ_A. Ainsi,

$\boxed{\mathscr{N} \subset T_0.}$

Et comme T_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$, il est stable par combinaisons linéaires, donc

$\boxed{V = \mathrm{Vect}(\mathscr{N}) \subset T_0.}$

III.3.1. On a $F_j = \begin{pmatrix} 1 & & 1 & \\ & (0) & & \\ -1 & & -1 & \\ & & & (0) \end{pmatrix}$, où les deux 1 sont en positions $(1,1)$ et $(1,j)$, et les deux -1 en positions $(j,1)$ et (j,j), tous les autres coefficients étant nuls. On voit donc que $\boxed{F_j^2 = 0.}$

III.3.2. Ainsi, F_j est nilpotente. Comme c'est aussi le cas de $E_{1,j}$ et $E_{j,1}$, comme combinaison linéaire de matrices nilpotentes, $\boxed{G_j \in V.}$

III.3.3. Les E_{ij} pour $i \neq j$ sont nilpotents et les G_k sont dans V, donc $\mathscr{F}$ est une famille de V.

Constatons que $G_k = E_{1,1} - E_{k,k}$. Soit une combinaison linéaire nulle de la famille $\mathscr{F}$,

$$\sum_{i \neq j} \lambda_{ij}\,E_{i,j} + \sum_{k=2}^n \lambda_k\,G_k = O_n.$$

Les coefficients non diagonaux de cette matrice sont exactement les λ_{ij} et sont donc nuls. Les coefficients diagonaux, sauf le premier, sont exactement les $-\lambda_k$ et sont donc nuls. Ainsi, tous les coefficients de cette combinaison linéaire sont nuls, donc $\boxed{\mathscr{F} \text{ est libre dans } V.}$

III.3.4. Cette famille contient $n^2 - 1$ vecteurs, donc $\dim(V) \geqslant n^2 - 1 = \dim(T_0)$. Or $V \subset T_0$, donc

$\boxed{V = T_0.}$

IV.1. Par définition, $\mathscr{T}_1 = \mathrm{Vect}((E_{i,j})_{1 \leqslant i < j \leqslant n})$ donc

$$\boxed{\dim(\mathscr{T}_1) = \mathrm{card}\{(i,j) \mid 1 \leqslant i < j \leqslant n\} = \frac{n\,(n-1)}{2}.}$$

IV.2. $\boxed{\text{C'est clair,}}$ d'après la question I.9.

IV.3. Comme $\dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})) = \dfrac{n\,(n+1)}{2}$, on a déjà

$$\dim(\mathscr{E}) = \dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})) + \dim(\mathscr{T}_1).$$

De plus, si une matrice est dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{T}_1$, ses coefficients sous la diagonale incluse sont nuls car elle est dans $\mathscr{T}_1$, et alors ses coefficients au-dessus de la diagonale sont nuls car elle est dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$: c'est donc O_n et $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{T}_1 = \{O_n\}$. Alors

$\boxed{\mathscr{E} = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \oplus \mathscr{T}_1.}$

IV.4.1. Considérons la somme $\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) + F \subset \mathscr{E}$. D'une part, $\dim(\mathscr{S}_n + F) \leqslant n^2$. D'autre part,

$$\begin{aligned} &\dim(\mathscr{S}_n + F) = \dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R})) + d - \dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap F) \\ &> \frac{n\,(n+1)}{2} + \frac{n\,(n-1)}{2} - \dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap F) \\ &= n^2 - \dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap F). \end{aligned}$$

D'où l'on tire que

$$\boxed{\dim(\mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \cap F) >} n^2 - n^2 = \underline{0.}$$

Cela signifie qu'il existe des matrices non nulles à la fois dans $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et dans F, donc dans $\mathscr{N}$, ce qui contredit la question I.11. Donc l'hypothèse sur d est à rejeter, et l'on a $\boxed{d \leqslant \dfrac{n\,(n-1)}{2}.}$

IV.4.2. On a donc un majorant de la dimension d'un sous-espace vectoriel de $\mathscr{N}$. Et ce majorant est atteint par $\mathscr{T}_1$ qui est inclus dans $\mathscr{N}$: c'est donc un maximum.

V.0 Comme $\mathscr{E}$ est de dimension finie, la norme que l'on considère n'a pas d'importance. Nommons-la $\|\cdot\|$.

V.1. On a vu à la question I.8 que

$$\mathscr{N} = \{M \in \mathscr{E} \mid M^n = O_n\}.$$

Considérons donc l'application

$$\Phi : \mathscr{E} \to \mathscr{E},\ M \mapsto M^n.$$

Comme les coefficients de M^n sont des polynômes en les coefficients de M, ils en dépendent continument, et comme $\mathscr{E}$ est de dimension finie, Φ est continue sur $\mathscr{E}$.

Si l'on considère une suite (A_k) d'éléments de $\mathscr{N}$ qui converge vers une matrice A de $\mathscr{E}$, ils vérifient tous $A_k^n = O_n$, ou encore $\Phi(A_k) = O_n$. Par continuité de Φ, à la limite, $\Phi(A) = O_n$, donc $A \in \mathscr{N}$.

Ainsi, $\mathscr{N}$ contient les limites de toutes ses suites convergentes, ce qui signifie que $\boxed{\mathscr{N} \text{ est fermé.}}$

V.2. D'après la question IV.2, il existe $T \in \mathscr{T}_1$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PTP^{-1}$. Alors

$$M = P(I_n + \alpha T)P^{-1}.$$

Or, T est strictement triangulaire supérieure, donc $I_n + \alpha T$ est triangulaire supérieure avec des 1 sur la diagonale. Alors,

$$\boxed{\det(M)} = \det(I_n + \alpha T) \underline{= 1.}$$

Soit $r > 0$. Considérons la boule ouverte $B(A, r)$ et la matrice $M = A + \varepsilon I_n$, où $\varepsilon > 0$ est fixé. D'après ce qui précède,

$$\det(M) = \varepsilon^n \det\Big(I_n + \frac{1}{\varepsilon}A\Big) = \varepsilon^n > 0,$$

donc $\mathrm{rg}(M) = n$. D'autre part,

$$\|M - A\| = \|\varepsilon I_n\| = \varepsilon \|I_n\|.$$

En choisissant $\varepsilon = \dfrac{r}{2\|I_n\|}$ par exemple, on voit que $\|M - A\| = \dfrac{r}{2} < r$, donc $M \in B(A, r)$.

$\boxed{\text{Ainsi, toute boule ouverte centrée en } A \text{ rencontre } \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}).}$

Mais $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est inclus dans le complémentaire de $\mathscr{N}$, donc A n'est pas un point intérieur de $\mathscr{N}$.

$\boxed{\text{Ainsi, l'intérieur de } \mathscr{N} \text{ est vide.}}$

V.3. $\boxed{\text{Si l'intérieur de } F \text{ n'est pas vide,}}$ il existe $A \in F$ et $r > 0$ tel que $B(A, r) \subset F$. Alors, $B(O_n, r) \subset F$. En effet, si $M \in B(O_n, r)$, $\|M\| < r$. Or $\|M\| = \|M + A - A\| < r$, donc $M + A \in B(A, r)$ donc $M + A \in F$. Alors, puisque $A \in F$, $M = M + A - A \in F$.

Soit $P \in \mathscr{E} \setminus \{O_n\}$. Alors $Q = \frac{r}{2\|P\|}P \in B(O_n, r)$ car $\|Q\| = \frac{r}{2} < r$, donc $Q \in F$ et $P \in F$, car il est colinéaire à Q.

Finalement, $\underline{F = \mathscr{E}.}$

Par contraposition, tout sous-espace vectoriel de $\mathscr{E}$ distinct de $\mathscr{E}$ est d'intérieur vide. En particulier, d'après la partie III, $V = T_0 \subsetneq \mathscr{E}$, donc V est d'intérieur vide. Alors, puisqu'il est inclus dans V,

$\boxed{\mathscr{N} \text{ est aussi d'intérieur vide.}}$

VI.1. On sait que dans $\mathbb{R}[X]$,

$$(1 + X)\sum_{k=0}^{n-1}(-X)^k = 1 - (-X)^n.$$

En évaluant cette égalité en la matrice αA, sachant que $A^n = O_n$,

$$(I_n + \alpha A)\sum_{k=0}^{n-1}(-\alpha A)^k = I_n - (-\alpha A)^n = I_n.$$

D'où l'on tire que $\boxed{M^{-1} = \sum_{k=0}^{n-1}(-\alpha A)^k.}$

VI.2. D'après le cours,

$$\boxed{\forall x \in \left]-1, 1\right[,\ (1 + x)^{1/2} = \sum_{k=0}^{+\infty}\binom{1/2}{k}x^k.}$$

IV.3. D'après le produit de Cauchy, on en déduit que pour tout $x \in \left]-1, 1\right[$,

$$\begin{aligned} 1 + x &= \left(\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{1/2}{k}x^k\right)^2 \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{1/2}{j}\binom{1/2}{k-j}\right)x^k. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\binom{1/2}{0}^2 = 1$, $2\binom{1/2}{0}\binom{1/2}{1} = 1$ et pour tout $k \geqslant 2$,

$$\sum_{j=0}^{k}\binom{1/2}{j}\binom{1/2}{k-j} = 0.$$

Alors, posons

$$\boxed{B = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{1/2}{k}(\alpha A)^k.}$$

En développant et en tenant compte de ces identités,

$$\begin{aligned} B^2 &= \sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{1/2}{j}\binom{1/2}{k-j}\right)(\alpha A)^k \\ &= I_n + \alpha A = M. \end{aligned}$$

Normalement, la somme devrait aller jusqu'à l'indice $k = 2(n-1)$, mais les puissances de A supérieures à n sont nulles.