Vingt-quatrième devoir à la maison

[E3A20]
Durée : 4 heures
Les calculatrices sont interdites
Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.

Exercice 1.

Pour tout entier naturel n, on définit sur l'intervalle $J = [1, +\infty[$ la fonction f_n par :

$$f_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{1+nx}}.$$

1. Démontrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge simplement sur J.

On note alors pour tout x de J, $\varphi(x)$ sa somme.

2. Montrer que cette série de fonctions ne converge pas normalement sur J.

3. Étudier alors sa convergence uniforme sur J.

4. Déterminer $\ell = \lim\limits_{x\to+\infty} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$.

5. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

5.1. Justifier la convergence de la série de terme général u_n. On note $a = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ sa somme.

5.2. Montrer que l'on a au voisinage de l'infini :

$$\varphi(x) = \ell + \frac{a}{\sqrt{x}} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right).$$

Exercice 2.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On dit que la matrice A est à diagonale propre lorsque son polynôme caractéristique est

$$\chi_A = \prod_{i=1}^{n} (X - a_{ii}).$$

1. Donner deux exemples de matrices à diagonale propre qui ne sont pas diagonales.

2. Soient α et β deux réels et

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \beta \\ \alpha & \beta & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur les réels α et β pour que M soit une matrice à diagonale propre.

3. Soient X_1, X_2 et X_3 des variables aléatoires mutuellement indépendantes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbb{P})$ et qui suivent toutes les trois la loi géométrique de paramètre $\frac{1}{3}$.

3.1. Préciser $X_1(\Omega)$. Donner la loi de la variable aléatoire X_1 et donner sans démonstration les valeurs de son espérance et de sa variance.

3.2. Exprimer l'évènement $[X_1 = X_2]$ sous forme d'une réunion dénombrable d'évènements incompatibles.

3.3. Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose :

$$B(\omega) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_1(\omega)-X_2(\omega) \\ 0 & 0 & X_2(\omega)-X_3(\omega) \\ X_1(\omega)-X_2(\omega) & X_2(\omega)-X_3(\omega) & 0 \end{pmatrix}.$$

On notera ainsi

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & X_1 - X_2 \\ 0 & 0 & X_2 - X_3 \\ X_1 - X_2 & X_2 - X_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

la fonction qui, à tout ω de Ω, associe $B(\omega)$.

Déterminer la probabilité pour que B soit une matrice à diagonale propre.

4. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On rappelle que A^T désigne la matrice transposée de la matrice A.

4.1. Calculer $\mathbf{tr}(A^T A)$ en fonction des coefficients de la matrice A où $\mathbf{tr}(M)$ désigne la trace de la matrice M.

4.2. On suppose dans cette question que A est une matrice symétrique réelle.

Démontrer que

$$\mathbf{tr}(A^T A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$$

où les λ_i sont les n valeurs propres distinctes ou non de la matrice A.

4.3. Déterminer les matrices symétriques réelles à diagonale propre.

Exercice 3.

Soient a un réel strictement positif et f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

Pour tout λ réel, on pose

$$I(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{\lambda - f(t)}{t}\,\mathrm{d}t,$$

lorsque cela existe.

1. $\boxed{\textbf{Dans cette question, et uniquement dans cette question, } f \text{ est la fonction } t \mapsto \cos\left(\frac{t}{1+t^2}\right).}$

1.1. En utilisant un développement asymptotique de f au voisinage de $+\infty$, donner un équivalent de $\lambda - f(t)$ lorsque t tend vers l'infini.

1.2. En déduire l'ensemble des valeurs du réel λ pour lesquelles $I(\lambda)$ existe.

1.3. Donner alors un équivalent de $\displaystyle\int_a^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ lorsque x tend vers l'infini.

2. On suppose qu'il existe λ et μ deux réels pour lesquels $I(\lambda)$ et $I(\mu)$ existent. Prouver que l'on a :
$$\lambda = \mu.$$

3. Pour tout x réel, on pose
$$H_\lambda(x) = \int_a^x (\lambda - f(t))\,\mathrm{d}t.$$

3.1. Justifier que H_λ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser $H_\lambda'(x)$.

3.2. Démontrer que si H_λ est bornée sur $\mathbb{R}$, alors $I(\lambda)$ existe et que
$$I(\lambda) = \int_a^{+\infty} \frac{H_\lambda(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

4. <u>Désormais on suppose que f est continue sur $\mathbb{R}$ et T-périodique</u> ($T > 0$).

4.1. Démontrer que la fonction φ qui à tout x réel associe $\varphi(x) = \displaystyle\int_x^{x+T} f(t)\,\mathrm{d}t$ est constante.

Montrer alors que l'on a, pour tout réel x :
$$H_\lambda(x+T) - H_\lambda(x) = \lambda T - \int_0^T f(t)\,\mathrm{d}t.$$

4.2. Montrer qu'il existe une unique valeur λ_0 du réel λ pour laquelle la suite $(H_\lambda(a+nT))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

4.3. Prouver que, dans ce cas, la fonction H_λ est périodique et bornée dans $\mathbb{R}$.

4.4. Déterminer alors toutes les valeurs du réel λ pour lesquelles $I(\lambda)$ converge.

4.5. Dans le cas où $\lambda_0 \neq 0$, déterminer un équivalent de $\displaystyle\int_a^x \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ lorsque x tend vers l'infini.

5. Pour tout entier naturel n non nul, on pose
$$A_n = \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t \text{ et } B_n = \int_0^{\pi/2} \frac{|\sin(nt)|}{t}\,\mathrm{d}t.$$

5.1. Prouver que A_n existe. On admettra qu'il en est de même pour B_n.

5.2. Déterminer un équivalent au voisinage de 0 de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{\sin(t)}$.

5.3. Démontrer que la suite $(A_n - B_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bornée.

5.4. On effectue dans B_n le changement de variable $u = nt$.

5.4.1. Donner un équivalent de B_n lorsque n tend vers l'infini. On pourra utiliser les résultats établis à la question **4**.

5.4.2. En déduire un équivalent de A_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 4.

Soient E un plan vectoriel, $\mathscr{B} = (\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ une base de E et $\theta \in \,]0, \pi[$ fixé.

On considère l'endomorphisme f de E représenté par sa matrice C dans la base $\mathscr{B}$:
$$C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

On définit alors sur E une forme bilinéaire symétrique Φ par les relations :
$$\Phi(\vec{\imath}, \vec{\jmath}) = \Phi(\vec{\jmath}, \vec{\imath}) = \cos(\theta) \text{ et } \Phi(\vec{\imath}, \vec{\imath}) = \Phi(\vec{\jmath}, \vec{\jmath}) = 1.$$

On rappelle qu'une forme bilinéaire sur E est une application de E^2 dans $\mathbb{R}$, linéaire par rapport à chacune de ses variables.

1. Soient $X = x_1\vec{\imath} + x_2\vec{\jmath}$ et $Y = y_1\vec{\imath} + y_2\vec{\jmath}$ deux vecteurs de E. Exprimer $\Phi(X, Y)$ en fonction des réels x_1, x_2, y_1, y_2 et θ.

2. Montrer que Φ est un produit scalaire sur E.

3. Prouver que f est une isométrie pour le produit scalaire Φ.

4. Déterminer un vecteur $\vec{k} \in E$ tel que $(\vec{\imath}, \vec{k})$ soit une base orthonormée pour Φ et que $\Phi(\vec{\jmath}, \vec{k}) > 0$.

5. Expliciter la matrice de f dans la base $(\vec{\imath}, \vec{k})$. Préciser la nature de f.

6. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Pour quelles valeurs de $\theta \in \,]0, \pi[$ a-t-on $f^m = \mathrm{id}_E$?

******

FIN