Vingt-sixième devoir à la maison

Caractérisation et exponentielle des matrices normales

[MP20]
Durée 3 h
L'usage de la calculatrice et de tout dispositif électronique est interdit.

Notations

— n désigne un entier naturel non nul.

— $\mathcal{M}_n$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées réelles de taille (n, n), dont la matrice unité est notée I_n.

— E_n désigne l'espace vectoriel des matrices réelles de taille $(n, 1)$ (matrices colonnes). On le munit de son produit scalaire usuel et de la norme (euclidienne) associée définis par :

$$(X \mid Y) = X^\top Y \text{ et } \|X\| = \sqrt{X^\top X}.$$

— Pour $A \in \mathcal{M}_n$, on note $A^\top$, la transposée de A.

— $\mathcal{S}_n$ (respectivement $\mathcal{A}_n$) désigne le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n$ constitué des matrices symétriques (respectivement antisymétriques) de $\mathcal{M}_n$.

— $\mathcal{O}_n = \{A \in \mathcal{M}_n, A\,A^\top = I_n\}$ est le groupe orthogonal d'ordre n.

— $\mathcal{SO}_n = \{A \in \mathcal{O}_n, \det(A) = 1\}$ est le groupe spécial orthogonal d'ordre n.

— Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on note

$$R(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \text{ et } S(\theta) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}.$$

On rappelle que $\mathcal{SO}_2 = \{R(\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$ et $\mathcal{O}_2 = \mathcal{SO}_2 \cup \{S(\theta), \theta \in \mathbb{R}\}$.

Définition 1 *Une matrice A de $\mathcal{M}_n$ est dite **normale** lorsqu'elle commute avec sa transposée, c'est-à-dire lorsque $A\,A^\top = A^\top A$.*

Définition 2 *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n$ est dite **orthogonalement semblable à** $B \in \mathcal{M}_n$ s'il existe $Q \in \mathcal{O}_n$ tel que $B = Q^\top A\,Q$. (On pourra noter en abrégé : A est **ORTS** à B.)*

Objectifs

— Dans un premier temps, ce problème vise à établir que, pour une matrice $A \in \mathcal{M}_n$, les quatre conditions suivantes sont équivalentes :

($\mathbf{C_1}$) Il existe un polynôme P à coefficients réels tel que $A^\top = P(A)$.

($\mathbf{C_2}$) La matrice A est normale.

($\mathbf{C_3}$) Pour tout $X \in E_n$, $\|A^\top X\| = \|A\,X\|$.

($\mathbf{C_4}$) La matrice A est orthogonalement semblable à une matrice diagonale par blocs, dont chaque bloc diagonal est :

— soit de taille $(1, 1)$,

— soit de taille $(2, 2)$ du type $r\,R(\theta)$, où $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

— Dans un second temps, on définit et caractérise l'exponentielle d'une telle matrice.

On pourra utiliser, sans démonstration, les deux résultats suivants :

Théorème 1 *Tout endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ admet au moins une droite ou un plan stable.*

Théorème 2 *Si $A \in \mathcal{M}_n$ et $B \in \mathcal{M}_n$ sont telles qu'il existe $Q \in \mathcal{O}_n$ vérifiant $B = Q^\top A\,Q$, alors pour tout polynôme P à coefficients réels, on a $P(B) = Q^\top P(A)\,Q$.*

I. Question préliminaire

1. Démontrer que la relation **ORTS** est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n$.

II. Exemples

2. Montrer que les éléments de $\mathcal{S}_n$ vérifient les conditions ($\mathbf{C_1}$), ($\mathbf{C_2}$), ($\mathbf{C_3}$) et ($\mathbf{C_4}$), et que ceux de $\mathcal{A}_n$ vérifient les conditions ($\mathbf{C_1}$), ($\mathbf{C_2}$) et ($\mathbf{C_3}$).

3. Montrer que les éléments de $\mathcal{O}_n$ vérifient les conditions ($\mathbf{C_2}$) et ($\mathbf{C_3}$).

4. Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$.
   Montrer que les matrices rT, où $r > 0$ et $T \in \mathcal{O}_2$, vérifient les conditions ($\mathbf{C_1}$) et ($\mathbf{C_4}$).

III. Deux premières implications

Soit $A \in \mathcal{M}_n$.

5. Montrer que si A vérifie la condition ($\mathbf{C_1}$), alors A vérifie la condition ($\mathbf{C_2}$).

6. Montrer que si A vérifie la condition ($\mathbf{C_2}$), alors A vérifie la condition ($\mathbf{C_3}$).

IV. La condition ($\mathbf{C_3}$) implique la condition ($\mathbf{C_4}$)

Dans cette question seulement, on suppose $n = 2$ et soit $A = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2$ vérifiant la condition ($\mathbf{C_3}$).

7. Montrer que $c = b$ ou bien ($b \neq 0$ et $c = -b$ et $a = d$).
   On pourra utiliser, par exemple, les vecteurs $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ *et* $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ *de* E_2.
   En déduire que A vérifie la condition ($\mathbf{C_4}$).

Dans toute la suite de cette partie, on se donne $A \in \mathcal{M}_n$ vérifiant la condition ($\mathbf{C_3}$).

8. Montrer que pour tout réel λ, la matrice $A - \lambda I_n$ vérifie ($\mathbf{C_3}$).
9. En déduire que A et $A^\top$ ont les mêmes sous-espaces propres et qu'ils sont deux à deux orthogonaux.
10. En utilisant la question précédente, déterminer une condition nécessaire et suffisante sur la matrice A pour qu'elle soit diagonalisable.
11. Pour $n \geqslant 3$, montrer que A est orthogonalement semblable à une matrice du type $\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}$, où $A_1 \in \mathcal{M}_p$ et $A_2 \in \mathcal{M}_{n-p}$ vérifient ($\mathbf{C_3}$), avec $p \in \{1, 2\}$.
    On pourra commencer par montrer que toute matrice orthogonalement semblable à A vérifie ($\mathbf{C_3}$).
12. Montrer que si A vérifie la condition ($\mathbf{C_3}$), alors A vérifie la condition ($\mathbf{C_4}$).

V. La condition ($\mathbf{C_4}$) implique la condition ($\mathbf{C_1}$)

Soit $Z = \{z_1, \dots, z_n\}$ une famille de n complexes deux à deux distincts.

13. Établir l'existence d'un unique polynôme P de $\mathbb{C}_{n-1}[X]$ tel que :
    $$\forall k \in \{1, \dots, n\},\ P(z_k) = \overline{z_k}.$$
    On suppose de plus que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\overline{z_k} \in Z$.
    Montrer alors que le polynôme P est réel.

Soient $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(r\,e^{i\theta}) = r\,e^{-i\theta}$.

14. Montrer que $P(r\,R(\theta)) = (r\,R(\theta))^\top$.
    Lorsque $\sin\theta \neq 0$, *on pourra utiliser la division euclidienne de P par le polynôme caractéristique χ de la matrice $r\,R(\theta)$ de $\mathcal{M}_2$.*
15. Montrer que si $A \in \mathcal{M}_n$ vérifie la condition ($\mathbf{C_4}$), alors A vérifie la condition ($\mathbf{C_1}$).

VI. Exponentielle d'une matrice normale

16. Pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, montrer que les séries
    $$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{r^k \cos(k\theta)}{k!} \quad \text{et} \quad \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{r^k \sin(k\theta)}{k!}$$
    convergent et calculer leur somme.

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n$ est désormais muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par :
$$\forall A = (A_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n,\ \|A\|_\infty = \max_{1 \leqslant i,j \leqslant n} |A_{i,j}|.$$

17. Montrer que, pour tout $(A, B) \in \mathcal{M}_n^2$,
    $$\|AB\|_\infty \leqslant n\,\|A\|_\infty\,\|B\|_\infty.$$

Pour $A \in \mathcal{M}_n$ et $p \in \mathbb{N}$, on pose
$$S_p(A) = \sum_{k=0}^{p} \frac{1}{k!} A^k.$$

18. Montrer que la suite $(S_p(A))_{p \in \mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{M}_n$, vers une limite que l'on notera $\operatorname{Exp}(A)$, et que :
    $$\forall Q \in \mathcal{O}_n,\ \operatorname{Exp}(Q^\top A Q) = Q^\top \operatorname{Exp}(A)\,Q.$$
    On pourra montrer que, pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant n$, la série numérique
    $$\sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{(A^k)_{i,j}}{k!}$$
    est absolument convergente.
19. Montrer que l'ensemble $\mathcal{E}_n$ constitué des matrices normales de $\mathcal{M}_n$ est un fermé de $\mathcal{M}_n$. Qu'en déduit-on pour $\operatorname{Exp}(A)$, lorsque $A \in \mathcal{E}_n$?
20. Soit $(r, \theta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Montrer que
    $$\operatorname{Exp}(r\,R(\theta)) = e^{r\cos\theta}\,R(r\sin\theta).$$
    En déduire que $\operatorname{Exp}(\mathcal{E}_n)$ est l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n$ orthogonalement semblables aux matrices diagonales par blocs, dont chaque bloc diagonal est :
    — soit du type $(\mu) \in \mathcal{M}_1$, avec $\mu > 0$,
    — soit du type $\alpha\,R(\beta) \in \mathcal{M}_2$, avec $\alpha > 0$ et $\beta \in \mathbb{R}$.

On note $\mathcal{S}_n^{++}$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathcal{M}_n$ à valeurs propres strictement positives, et $\mathcal{F}_n$ l'ensemble des matrices B de $\mathcal{M}_n$ vérifiant les conditions :

— les valeurs propres négatives de B sont de multiplicité paire,
— il existe $S \in \mathcal{S}_n^{++}$ et $T \in \mathcal{SO}_n$ telles que $B = ST = TS$.

21. Démontrer que $\operatorname{Exp}(\mathcal{E}_n) = \mathcal{F}_n$.
22. La matrice $B = (B_{i,j}) \in \mathcal{M}_n$ définie par :
    $$B_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } 1 \leqslant i+1 = j \leqslant n \text{ ou } (i,j) = (n,1) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
    est-elle l'exponentielle d'une matrice de $\mathcal{E}_n$?

Fin du problème