

# Vingt-septième devoir à la maison

[CS22]  
4 heures  
Calculatrice autorisée

## Objectif

Ce problème propose d'étudier quelques propriétés d'un opérateur intégral  $U$  défini sur un espace préhilbertien réel  $E$ . Cet espace et son produit scalaire sont introduits dans la partie II et l'opérateur  $U$  est étudié dans la partie III. Dans la partie IV, on s'intéresse à l'étude d'une famille d'équations différentielles à un paramètre pour lesquelles on recherche des solutions développables en séries entières. Enfin, la partie V fait le lien entre les vecteurs propres de l'endomorphisme  $U$  et les solutions des équations différentielles trouvées dans la partie IV.

## Liens entre les différentes parties

- Les parties I et II sont très largement indépendantes à l'exception de la définition de la fonction  $k_x$ .
- La partie III utilise les résultats de la partie II ainsi que la condition d'appartenance à  $E$  établie dans la partie I.
- La partie IV fait ponctuellement appel à l'espace  $E$  défini et étudié dans les parties I et II. Elle est indépendante de la partie III.
- La partie V utilise les résultats des parties III et IV ainsi que le résultat de la question 3.

## Notations

On note  $E$  l'ensemble des fonctions  $f$  continues de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$  telles que l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f^2(t) \frac{e^{-t}}{t} dt$  converge.

Pour  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ , on note  $p_\alpha$  la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & t^\alpha. \end{array}$$

## I Préliminaires : étude de quelques éléments de $E$

### I.A – Des fonctions de $E$ utiles pour la suite

**Q1.** Montrer que, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $p^\alpha$  appartient à  $E$ .

**Q2.** Soit  $P$  une fonction polynomiale non identiquement nulle à coefficients réels. Montrer que la restriction de  $P$  à  $\mathbb{R}_+^*$  appartient à  $E$  si et seulement si  $P(0) = 0$ .

**Q3.** Soient  $a$  et  $b$  deux nombres réels. Montrer que la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & ae^t + b \end{array}$$

appartient à  $E$  si et seulement si  $a = b = 0$ .

**Q4.** Montrer que, pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , la fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & (e^t - 1)^2 \frac{e^{-t}}{t} \end{array}$$

est intégrable sur  $]0, x]$ .

**Q5.** Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  et tout  $t \in \mathbb{R}_+^*$ , on note  $k_x(t) = e^{\min(x,t)} - 1$  où  $\min(x,t)$  désigne le plus petit des réels  $x$  et  $t$ . Représenter graphiquement la fonction  $k_x$ . Montrer que  $k_x$  appartient à  $E$ .

### I.B – Une condition suffisante d'appartenance à $E$

Dans cette sous-partie, on suppose que  $f$  est une fonction de  $\mathbb{R}_+^*$  dans  $\mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  vérifiant

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \\ \exists C > 0; \forall x > 0, |f(x)| \leq C\sqrt{x}. \end{cases}$$

**Q6.** Pour  $x \in \mathbb{R}_+^*$ , on pose

$$\Phi(x) = \frac{4\sqrt{x}e^{x/2}}{1+x} - \int_0^x \frac{e^{t/2}}{\sqrt{t}} dt.$$

Montrer que  $\Phi$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ , que  $\lim_{x \rightarrow 0} \Phi(x) = 0$  et que, pour tout  $x > 0$ ,  $\Phi'(x) \geq 0$ . En déduire que  $\Phi(x) \geq 0$  pour tout  $x > 0$ .

**Q7.** Montrer que, pour tout  $x > 0$ ,

$$|f(x)| \leq 4C \frac{\sqrt{x}e^{x/2}}{1+x}.$$

**Q8.** En déduire que  $f \in E$ .

## II Structure préhilbertienne de $E$

**Q9.** Montrer que, si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions de  $E$ , alors l'intégrale  $\int_0^{+\infty} f(t)g(t) \frac{e^{-t}}{t} dt$  est absolument convergente.

**Q10.** En déduire que  $E$  est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel  $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+^*, \mathbb{R})$  des fonctions continues sur  $\mathbb{R}_+^*$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

Pour toutes fonctions  $f \in E$  et  $g \in E$ , on pose,

$$\langle f | g \rangle = \int_0^{+\infty} f(t)g(t) \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

**Q11.** Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur  $E$ .

La norme  $\|\cdot\|$  associée à ce produit scalaire est donc définie pour toute fonction  $f \in E$  par

$$\|f\| = \left( \int_0^{+\infty} f^2(t) \frac{e^{-t}}{t} dt \right)^{1/2}.$$

**Q12.** Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0} \|k_x\| = 0$ . On rappelle que, pour tout  $x > 0$ ,  $k_x(t) = e^{\min(x,t)} - 1$ .

**Q13.** Montrer que, pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\int_0^{+\infty} t^k e^{-t} dt = k!$$

**Q14.** On rappelle que les fonctions  $p^\alpha$  ont été définies dans les notations en tête de sujet. La famille  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est-elle une famille orthogonale de  $E$  ?

### III Un opérateur sur $E$

À chaque fonction  $f \in E$ , on associe la fonction  $U(f)$  définie pour tout  $x > 0$  par

$$U(f)(x) = \langle k_x | f \rangle = \int_0^{+\infty} (e^{\min(x,t)} - 1) f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

**III.A –**

**Q15.** À l'aide de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que pour toute fonction  $f \in E$ ,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} U(f)(x) = 0.$$

**Q16.** Montrer que pour toute fonction  $f \in E$  et pour tout  $x > 0$ ,

$$U(f)(x) = \int_0^x (1 - e^{-t}) \frac{f(t)}{t} dt + (e^x - 1) \int_x^{+\infty} f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

**Q17.** Soit  $f \in E$ . Montrer que  $U(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et vérifie, pour tout  $x > 0$ ,

$$(U(f))'(x) = e^x \int_x^{+\infty} f(t) \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

Dans la suite, pour alléger les notations, la dérivée de la fonction  $U(f)$  est notée  $U(f)'$ .

**Q18.** Soit  $f \in E$ . Montrer que  $U(f)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et que la fonction  $U(f)$  est solution sur  $\mathbb{R}_+^*$  de l'équation différentielle

$$(III.1) \quad y'' - y' = -\frac{f(x)}{x}.$$

**Q19.** Montrer que pour tout  $f \in E$  et pour tout  $x > 0$ ,

$$|U(f)'(x)| \leqslant e^x \|f\| \left( \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt \right)^{1/2} \leqslant \|f\| \frac{e^{x/2}}{\sqrt{x}}.$$

**Q20.** Déduire de ce qui précède que  $U$  est un endomorphisme de  $E$  et que, pour tout  $f \in E$  et tout  $x > 0$ ,

$$|U(f)(x)| \leqslant 4 \|f\| \frac{\sqrt{x} e^{x/2}}{1+x}.$$

**Q21.** En déduire que

$$\|U(f)\| \leqslant 4 \|f\|.$$

**Q22.** Montrer que  $U$  est injectif.

**Q23.** L'endomorphisme  $U$  est-il surjectif ?

**III.B –** On fixe deux fonctions  $f$  et  $g$  de  $E$ . Pour  $x > 0$ , on pose

$$F(x) = -U(f)'(x) e^{-x}.$$

**Q24.** Vérifier que  $F$  est une primitive de  $x \mapsto f(x) \frac{e^{-x}}{x}$  sur l'intervalle  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Q25.** Montrer que pour tout  $x > 0$ ,

$$|F(x) U(g)(x)| \leqslant 4 \frac{\|f\| \|g\|}{1+x}.$$

**Q26.** Montrer que pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,

$$|F(x)| \leqslant \|f\| (e^{-1} - \ln(x))^{1/2}.$$

On pourra utiliser la question 19.

**Q27.** Montrer l'existence et calculer les valeurs des limites en 0 et en  $+\infty$  de la fonction  $t \mapsto F(t) U(g)(t)$ .

**Q28.** Montrer que

$$\langle f | U(g) \rangle = \int_0^{+\infty} U(f)'(t) U(g)'(t) e^{-t} dt.$$

**Q29.** En déduire que  $\langle f | U(g) \rangle = \langle U(f) | g \rangle$ .

### IV Solutions d'une équation différentielle développables en série entière

Pour  $p \in \mathbb{R}^*$  on note  $(E_p)$  l'équation différentielle sur  $\mathbb{R}_+^*$

$$(E_p) \quad x(y'' - y') + py = 0.$$

**Q30.** Soient  $p \in \mathbb{R}^*$  et  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de nombres réels. On suppose que la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  a un rayon de convergence infini. Montrer que la fonction  $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  est solution de  $(E_p)$  si et seulement si

$$\begin{cases} a_0 = 0, \\ n(n+1)a_{n+1} = (n-p)a_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

**IV.A – Recherche de solutions polynomiales**

**Q31.** Montrer que  $(E_p)$  possède des solutions polynomiales non identiquement nulles si et seulement si  $p \in \mathbb{N}^*$ . Montrer qu'alors, les solutions polynomiales non nulles de  $(E_p)$  sont de degré  $p$  et appartiennent à l'espace vectoriel  $E$ .

On ne demande pas de déterminer explicitement les solutions polynomiales lorsqu'elles existent.

Dans la suite de cette sous-partie, on fixe  $p \in \mathbb{N}^*$  et on considère un polynôme  $P \in \mathbb{R}[X]$  tel que la fonction polynomiale  $x \mapsto P(x)$  soit solution de l'équation  $(E_p)$ . L'objectif est de déterminer une expression simple de  $P$  en fonction du paramètre  $p$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on note  $h(x) = e^{-x} P(x)$ .

**Q32.** Montrer que la fonction  $h$  est solution de l'équation différentielle  $x(y'' + y') + py = 0$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

**Q33.** Justifier que la fonction  $h$  est développable en série entière sur  $\mathbb{R}$ .

On note  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des coefficients du développement en série entière de  $h$ . Ainsi, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $h(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ . On peut montrer, de la même façon qu'à la question 30 (cette démonstration n'est pas demandée), que ces coefficients vérifient

$$\begin{cases} b_0 = 0, \\ n(n+1)b_{n+1} = -(n+p)b_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

**Q34.** Établir que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$b_n = \frac{(-1)^{n-1}(n+p-1)!}{p!n!(n-1)!} b_1.$$

**Q35.** On pose  $g_p(x) = x^{p-1} e^{-x}$ . Justifier que  $g_p^{(p)}$  est développable en série entière et déduire de la question 34 que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$P(x) = C x e^x g_p^{(p)}(x)$$

où  $C$  est une constante réelle dont on précisera l'expression en fonction de  $b_1$  et de  $p$ .

**IV.B – Solutions développables en séries entières non polynomiales**

Dans toute cette sous-partie, on fixe un réel  $p$  non nul et on suppose que  $p \notin \mathbb{N}^*$ .

**Q36.** Justifier l'existence de suites  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  non identiquement nulles telles que la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  ait un rayon de convergence infini et telles

que la fonction  $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$  soit solution de  $(E_p)$ .

On fixe une telle série entière et on pose pour  $x > 0$ ,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

**Q37.** Montrer qu'il existe un entier naturel  $q > p$  tel que, pour tout entier  $n \geq q$ ,

$$|a_{n+1}| \geq \frac{|a_n|}{2(n+1)}.$$

**Q38.** En déduire que, pour tout entier  $n \geq q$ ,

$$|a_n| \geq \frac{q! |a_q|}{2^{n-q} n!}.$$

**Q39.** Montrer que la fonction

$$\psi \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| x^n \end{array} \right.$$

n'est pas un élément de  $E$ .

**Q40.** En déduire enfin que la fonction  $f$  n'est pas un élément de  $E$ .

**V Éléments propres de  $U$** 

**Q41.** Le nombre réel 0 est-il valeur propre de  $U$  ?

**Q42.** Soit  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ . On suppose que  $\lambda$  est valeur propre de  $U$ . Soit  $f$  un vecteur propre associé. Montrer que  $f$  est solution de l'équation différentielle  $(E_{1/\lambda})$ .

On suppose que  $f$  est développable en série entière sur  $\mathbb{R}_+^*$ , c'est-à-dire qu'il existe une série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  de rayon de convergence infini telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

**Q43.** Montrer que les seules valeurs propres possibles de  $U$  sont de la forme  $\lambda = 1/p$  avec  $p \in \mathbb{N}^*$ .

**Q44.** Soit  $P$  une solution polynomiale non nulle de  $(E_p)$ . Démontrer que la fonction  $pU(P) - P$  vérifie sur  $\mathbb{R}_+^*$  l'équation différentielle  $y'' - y' = 0$ .

**Q45.** Montrer que  $P$  est un vecteur propre de  $U$  pour la valeur propre  $1/p$ .

**Q46.** Pour tout entier  $p \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x > 0$ , on pose  $P_p(x) = x e^x g_p^{(p)}(x)$ , où  $g_p(x) = x^{p-1} e^{-x}$ . On rappelle que  $P_p$  est une fonction polynomiale de degré  $p$  et que  $P_p \in E$ . Montrer que les polynômes  $P_p$  sont deux à deux orthogonaux dans  $E$ .

---

• • • FIN • • •

---