

Vingt-neuvième devoir à la maison

[D'après CCP02]

NOTATIONS. n est un entier supérieur ou égal à 1. $\mathbb{K}$ est le corps des réels ou celui des complexes. $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ désigne le $\mathbb{K}$ -espace vectoriel des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ ayant n lignes et n colonnes. I_n représente la matrice identité et O_n la matrice nulle de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Tout vecteur $x = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ de $\mathbb{K}^n$ est identifié à un élément X de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que l'élément de la i^{e} ligne de X soit x_i . Dans toute la suite, nous noterons indifféremment $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ un élément de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ aussi bien que le vecteur de $\mathbb{K}^n$ qui lui est associé.

Pour $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $X = (x_i)_{1 \leq i \leq n}$ dans $\mathbb{K}^n$, on note $(AX)_i$ le coefficient de la i^{e} ligne de AX .

Pour toute matrice A de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\text{Sp } A$ l'ensemble des valeurs propres complexes de A et on appelle rayon spectral de A le réel $\rho(A)$ défini par

$$\rho(A) = \max_{\lambda \in \text{Sp } A} |\lambda|.$$

Conformément à l'usage, on note N_∞ la norme définie sur $\mathbb{C}^n$ par

$$\forall X = (x_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{C}^n, \quad N_\infty(X) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$$

On qualifie de norme matricielle toute norme N définie sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant la propriété

$$\forall (A, B) \in (\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}))^2, \quad N(AB) \leq N(A) \cdot N(B).$$

On admet que toutes normes N et N' définies sur un espace vectoriel de dimension finie E quelconque sont équivalentes, c'est-à-dire qu'il existe deux réels strictement positifs α et β tels que

$$\forall x \in E, \quad \alpha N(x) \leq N'(x) \leq \beta N(x).$$

1. a) Montrer que l'application

$$\psi : \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}, \quad A = (a_{i,j}) \mapsto \max_{1 \leq i,j \leq n} |a_{i,j}|$$

est une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, mais n'est pas en général une norme matricielle sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

b) Montrer que $n\psi$ est une norme matricielle sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

2. Montrer que pour toute norme N définie sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, il existe une constante C réelle positive telle que

$$\forall (A, B) \in (\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}))^2, \quad N(AB) \leq C N(A) N(B).$$

On pourra introduire une norme matricielle sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et N une norme quelconque sur $\mathbb{C}^n$. On pose

$$M_A = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{i,j}|.$$

3. a) Montrer que pour tout $X \in \mathbb{C}^n$,

$$N_\infty(AX) \leq M_A N_\infty(X).$$

b) Montrer qu'il existe une constante réelle C_A telle que

$$\forall X \in \mathbb{C}^n, \quad N(AX) \leq C_A N(X).$$

c) Montrer que l'ensemble

$$\left\{ \frac{N(AX)}{N(X)} \mid X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\} \right\}$$

possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

On notera dans la suite

$$\widetilde{N}(A) = \sup_{X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}} \frac{N(AX)}{N(X)}.$$

d) Montrer que $\widetilde{N}_\infty(A) \leq M_A$.

4. Soit i_0 un entier compris entre 1 et n tel que $\sum_{j=1}^n |a_{i_0,j}| = M_A$. En considérant le vecteur Y de $\mathbb{C}^n$ de composantes y_j définies par

$$y_j = \frac{\overline{a_{i_0,j}}}{|a_{i_0,j}|} \text{ si } a_{i_0,j} \neq 0 \text{ et } y_j = 1 \text{ si } a_{i_0,j} = 0,$$

montrer que $M_A \leq \widetilde{N}_\infty(A)$ et en déduire $\widetilde{N}_\infty(A) = M_A$.

5. Montrer que

a) $\widetilde{N}(A) = 0 \iff A = O_n$;

b) $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \widetilde{N}(\lambda A) \leq |\lambda| \widetilde{N}(A)$;

c) $\forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad \widetilde{N}(\lambda A) = |\lambda| \widetilde{N}(A)$;

d) $\forall B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}), \quad \widetilde{N}(A+B) \leq \widetilde{N}(A) + \widetilde{N}(B)$;

e) $\forall X \in \mathbb{C}^n, \quad N(AX) \leq \widetilde{N}(A) N(X)$.

f) Dédurre de ces résultats que $\widetilde{N}$ est une norme matricielle sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. On lui donne le nom de norme matricielle subordonnée à la norme N .

6. a) En considérant une valeur propre λ de A telle que $|\lambda| = \rho(A)$, montrer que $\rho(A) \leq \widetilde{N}(A)$.

b) Donner un exemple simple de matrice A non nulle vérifiant $\rho(A) = \widetilde{N}_\infty(A)$.

c) Montrer que si A est nilpotente non nulle, on a l'inégalité stricte $\rho(A) < \widetilde{N}(A)$.

7. Montrer que si $\lim_{k \rightarrow +\infty} A^k = O_n$, alors $\rho(A) < 1$.