

Corrigé du vingt-neuvième devoir à la maison

NOTATION. Pour alléger les écritures, on notera $\sum_j$ pour $\sum_{j=1}^n$, où j est un indice muet.

1.a. On reconnaît la norme $\|\cdot\|_\infty$ usuelle dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$,
donc ψ est une norme.

Commentaire. L'énoncé attendait vraisemblablement qu'on le redémontre. À vous de jouer.

Soit J la matrice ne contenant que des 1 : on a $J^2 = nJ$. Alors $\psi(J^2) = n\psi(J) = n$, mais $\psi(J) = 1$, donc dès que $n \geq 2$, $\psi(J^2) > \psi(J)^2$ et

ψ n'est en général pas matricielle.

1.b. La multiplication de ψ par un scalaire positif ne change pas les propriétés vérifiées par ψ , donc $n\psi$ est clairement une norme.

Soient $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ et $C = AB = (c_{ij})$. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$,

$$\begin{aligned} |c_{ij}| &= \left| \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_{ik}| |b_{kj}| \\ &\leq \sum_{k=1}^n \psi(A) \psi(B) = n \psi(A) \psi(B), \end{aligned}$$

donc $\psi(C) \leq n \psi(A) \psi(B)$. En multipliant par n , $n\psi(AB) \leq n\psi(A) n\psi(B)$ et $n\psi$ est matricielle.

2. Soit N' une norme matricielle sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Comme $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est de dimension finie, toutes ses normes sont équivalentes, donc il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $\alpha N' \leq N \leq \beta N'$. Soient A et B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

$$\begin{aligned} N(AB) &\leq \beta N'(AB) \leq \beta N'(A) N'(B) \\ &\leq \beta \frac{1}{\alpha} N(A) \frac{1}{\alpha} N(B). \end{aligned}$$

En posant $C = \beta/\alpha^2$, on a

$$\left| \begin{array}{l} \exists C > 0, \forall (A, B) \in (\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}))^2, \\ N(AB) \leq C N(A) N(B). \end{array} \right|$$

3.a. Soient $X \in \mathbb{C}^n$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

$$\begin{aligned} |(AX)_i| &= \left| \sum_j a_{i,j} x_j \right| \leq \sum_j |a_{i,j}| |x_j| \\ &\leq \sum_j |a_{i,j}| N_\infty(X) = N_\infty(X) \sum_j |a_{i,j}| \\ &\leq N_\infty(X) M_A. \end{aligned}$$

Donc

$$\max_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket} |(AX)_i| \leq N_\infty(X) M_A.$$

Ainsi,

$$\left| \forall X \in \mathbb{C}^n, N_\infty(AX) \leq M_A N_\infty(X). \right|$$

3.b. Les normes N et N_∞ sont équivalentes donc il existe $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ tel que $\alpha N_\infty \leq N \leq \beta N_\infty$. Soit $X \in \mathbb{C}^n$. On a

$$\begin{aligned} N(AX) &\leq \beta N_\infty(AX) \leq \beta M_A N_\infty(X) \\ &\leq \beta M_A \frac{1}{\alpha} N(X). \end{aligned}$$

En posant $C_A = \beta M_A/\alpha$, on a prouvé que

$$\left| \exists C_A \in \mathbb{R}_+, \forall X \in \mathbb{C}^n, N(AX) \leq C_A N(X). \right|$$

3.c. Donc l'ensemble de l'énoncé est majoré (par C_A) et il admet une borne supérieure.

3.d. D'après 3.a, pour tout $X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$,

$$\frac{N_\infty(AX)}{N_\infty(X)} \leq M_A,$$

$$\text{donc } \sup_{X \neq 0} \frac{N_\infty(AX)}{N_\infty(X)} \leq M_A,$$

$$\left| \text{donc } \widetilde{N}_\infty(A) \leq M_A. \right|$$

4. Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Si $a_{i_0,j} \neq 0$,

$$|y_j| = \left| \frac{\overline{a_{i_0,j}}}{|a_{i_0,j}|} \right| = 1$$

$$\text{et } a_{i_0,j} y_j = a_{i_0,j} \frac{\overline{a_{i_0,j}}}{|a_{i_0,j}|} = \frac{|a_{i_0,j}|^2}{|a_{i_0,j}|} = |a_{i_0,j}|.$$

Sinon, $y_j = 1$ donc $|y_j| = 1$ et $a_{i_0,j} y_j = 0 = |a_{i_0,j}|$. Alors $N_\infty(Y) = 1$ et

$$(AY)_{i_0} = \sum_j a_{i_0,j} y_j = \sum_j |a_{i_0,j}| = M_A.$$

Or $|(AY)_{i_0}| \leq N_\infty(AY)$ donc $M_A \leq N_\infty(AY)$. Mais $N_\infty(AY) \leq M_A N_\infty(Y) = M_A$ donc $N_\infty(AY) = M_A$. Alors

$$\left| M_A = N_\infty(AY) = \frac{N_\infty(AY)}{N_\infty(Y)} \leq \widetilde{N}_\infty(A). \right|$$

Finalement, d'après 3.d,

$$\left| \widetilde{N}_\infty(A) = M_A. \right|$$

5.a. D'une part, si $X \neq 0$, $N(O_n X) = N(0) = 0$ donc $\frac{N(O_n X)}{N(X)} = 0$ et

$$\widetilde{N}(O_n) = \sup_{X \neq 0} \frac{N(O_n X)}{N(X)} = 0.$$

D'autre part, supposons que $\widetilde{N}(A) = 0$. Alors pour tout $X \in \mathbb{C}^n$, $N(AX) \leq \widetilde{N}(A) N(X) = 0$ donc $N(AX) = 0$ et $AX = 0$. Donc l'endomorphisme canoniquement associé à A est nul et $A = O_n$. Ainsi,

$$\left| \widetilde{N}(A) = 0 \iff A = O_n. \right|$$

5.b. Soient $\lambda \in \mathbb{C}$ et $X \neq 0$:

$$\frac{N(\lambda AX)}{N(X)} = |\lambda| \frac{N(AX)}{N(X)} \leq |\lambda| \widetilde{N}(A)$$

$$\text{donc } \left| \widetilde{N}(\lambda A) \leq |\lambda| \widetilde{N}(A). \right|$$

5.c. Si $\lambda = 0$, on a bien $\widetilde{N}(\lambda A) = |\lambda| \widetilde{N}(A)$. Sinon, en appliquant 5.b,

$$\widetilde{N}(A) = \widetilde{N}\left(\frac{1}{\lambda} \lambda A\right) \leq \frac{1}{|\lambda|} \widetilde{N}(\lambda A)$$

d'où $|\lambda| \widetilde{N}(A) \leq \widetilde{N}(\lambda A)$. Par double inégalité,

$$\left| \widetilde{N}(\lambda A) = |\lambda| \widetilde{N}(A). \right|$$

5.d. Soit $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Pour $X \neq 0$,

$$\frac{N((A+B)X)}{N(X)} \leq \frac{N(AX) + N(BX)}{N(X)} \leq \tilde{N}(A) + \tilde{N}(B)$$

d'où $\tilde{N}(A+B) \leq \tilde{N}(A) + \tilde{N}(B)$.

5.e. Par définition de $\tilde{N}(A)$,

$$\forall X \in \mathbb{C}^n, N(AX) \leq \tilde{N}(A)N(X).$$

C'est directement vrai si $X \neq 0$, et si $X = 0$, les deux membres sont nuls.

5.f. L'application

$$\tilde{N} : \mathfrak{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{R}_+, A \mapsto \tilde{N}(A)$$

vérifie la séparation (propriété a), l'homogénéité positive (propriété c) et l'inégalité triangulaire (propriété d), donc c'est une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

En outre, pour A et B dans $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ et $X \neq 0$,

$$\frac{N(ABX)}{N(X)} \leq \frac{\tilde{N}(A)N(BX)}{N(X)} \leq \tilde{N}(A)\tilde{N}(B),$$

donc

$$\tilde{N}(AB) = \sup_{X \neq 0} \frac{N(ABX)}{N(X)} \leq \tilde{N}(A)\tilde{N}(B).$$

Ainsi, $\tilde{N}$ est une norme matricielle sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$.

6.a. Soit $\lambda \in \text{Sp } A$ tel que $\rho(A) = |\lambda|$ et soit X un vecteur propre associé. D'une part,

$$\frac{N(AX)}{N(X)} = \frac{N(\lambda X)}{N(X)} = |\lambda|.$$

D'autre part, $\frac{N(AX)}{N(X)} \leq \tilde{N}(A)$.

Donc $\rho(A) \leq \tilde{N}(A)$.

6.b. Pour $A = I_n$, $\rho(A) = 1$ et $\tilde{N}_\infty(A) = M_A = 1$.

6.c. Soit une matrice A nilpotente non nulle. Il existe un entier k tel que $A^k = O_n$, donc les valeurs propres de A sont parmi les racines du polynôme X^k , donc $\text{Sp } A = \{0\}$ car il n'est pas vide. Alors $\rho(A) = 0$. Mais $\tilde{N}(A) \neq 0$ car $A \neq O_n$.

7. Supposons que la suite (A^k) tende vers O_n .

D'une part, d'après 6.a, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\rho(A^k) \leq \tilde{N}(A^k).$$

D'autre part, comme $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{C}$, donc A est trigonalisable, c'est-à-dire semblable à une matrice triangulaire supérieure T . On a $\text{Sp}(A) = \text{Sp}(T)$ et $\rho(A) = \rho(T)$. De même, A^k est semblable à T^k , $\text{Sp}(A^k) = \text{Sp}(T^k)$ et $\rho(A^k) = \rho(T^k)$. La fonction $t \mapsto t^k$ croît sur $\mathbb{R}_+$ donc

$$\max_{\lambda \in \text{Sp } T} |\lambda^k| = \max_{\lambda \in \text{Sp } T} |\lambda|^k = \left(\max_{\lambda \in \text{Sp } T} |\lambda| \right)^k.$$

Ainsi, $\rho(A^k) = (\rho(A))^k$.

Alors la suite $((\rho(A))^k)$ tend vers 0.

Alors $\rho(A) < 1$.