Troisième devoir à la maison

[CS21]
Calculatrice autorisée
Les questions étoilées sont réservées aux 5/2 et aux 3/2 aventureux.

A – Symbole de Pochhammer

On définit le symbole de Pochhammer, pour tout nombre réel a et tout entier naturel n par

$$[a]_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ a\,(a+1)\cdots(a+n-1) = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(a+k) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Q 1. Si a est un entier négatif ou nul, justifier que la suite $([a]_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle à partir d'un certain rang.

Q 2. Soit $a \in \mathbb{R}$. Vérifier que, pour tout entier naturel n, $[a]_{n+1} = a\,[a+1]_n$.

Q 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une expression de $[a]_n$ à l'aide de factorielles lorsque $a \in \mathbb{N}^*$.

B – Fonction hypergéométrique confluente

Soient deux nombre réels a et c tels que $c \notin -\mathbb{N}$.

Q 4.* Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle

$$x\,y''(x) + (c - x)\,y'(x) - a\,y(x) = 0. \tag{B.1}$$

On exprimera ces solutions à l'aide du symbole de Pochhammer et on précisera la structure algébrique de leur ensemble.

On note $M_{a,c}$ la solution de l'équation $(B.1)$ vérifiant $M_{a,c}(0) = 1$. Cette fonction est appelée *fonction hypergéométrique confluente* associée au couple (a, c).

C – Les polynômes de Laguerre

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose, pour tout nombre réel x,

$$\Phi_n(x) = e^{-x}x^n \quad\text{et}\quad L_n(x) = \frac{e^x}{n!}\,\Phi_n^{(n)}(x).$$

Q 5. Déterminer L_0, L_1, L_2 et L_3.

Dans toute la suite, n est un entier naturel non nul.

Q 6. En utilisant la formule de Leibniz, démontrer que la fonction L_n est polynomiale de degré n. Déterminer les coefficients $c_{n,k}$ tels que

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} c_{n,k}\,x^k.$$

Q 7. Pour tout nombre réel x, exprimer $\Phi_n^{(n)}(x)$ et $\Phi_n^{(n+1)}(x)$ en fonction de $L_n(x)$ et $L_n'(x)$.

Q 8. Utiliser l'égalité

$$\Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) = \frac{\mathrm{d}^{n+1}x\,\Phi_n(x)}{\mathrm{d}x^{n+1}},$$

que l'on justifiera, pour démontrer l'égalité

$$L_{n+1}(x) = \left(1 - \frac{x}{n+1}\right)L_n(x) + \frac{x}{n+1}\,L_n'(x)$$

valable pour tout nombre réel x.

Q 9. Utiliser l'égalité

$$\Phi_{n+1}^{(n+2)}(x) = \frac{\mathrm{d}^{n+1}\Phi_{n+1}^{(1)}(x)}{\mathrm{d}x^{n+1}}$$

pour démontrer l'égalité

$$L_{n+1}'(x) = L_n'(x) - L_n(x)$$

valable pour tout nombre réel x.

Q 10. En déduire que L_n est solution de l'équation différentielle

$$x\,L_n''(x) + (1 - x)\,L_n'(x) + n\,L_n(x) = 0. \tag{C.1}$$

Q 11.* Montrer que L_n est une fonction hypergéométrique confluente.