

Corrigé du troisième devoir à la maison

CONVENTION. Convenons que si un produit est vide, c'est-à-dire si l'ensemble de ses indices est vide, on lui attribue la valeur 1. Avec cette convention, pour tout $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$[a]_n = \prod_{k=0}^{n-1} (a+k).$$

En effet, c'est la définition quand $n \geq 1$, et

$$[a]_0 = \prod_{k=0}^{-1} (a+k) = 1$$

avec la convention d'écriture proposée.

Q1. Si $a \in -\mathbb{N}$, $n = -a + 1 \in \mathbb{N}^*$ et

$$[a]_n = a(a+1) \cdots (a+(-a+1)-1) = 0.$$

De plus, pour tout entier $p \geq n+1$,

$$[a]_p = \prod_{k=0}^{p-1} (a+k) = [a]_n \prod_{k=n}^{p-1} (a+k) = 0.$$

Si a est un entier négatif ou nul, la suite $([a]_n)$ est nulle à partir du rang $-a+1$.

Q2. Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \lfloor [a]_{n+1} \rfloor &= \prod_{k=0}^n (a+k) = a \prod_{k=1}^n (a+k) \\ &= a \prod_{k=0}^{n-1} (a+1+k) = \lfloor [a+1]_n \rfloor. \end{aligned}$$

Q3. Soient $a \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} \lfloor [a]_n \rfloor &= \prod_{k=0}^{n-1} (a+k) = \prod_{k=a}^{a+n-1} k \\ &= \frac{\prod_{k=1}^{a+n-1} k}{\prod_{k=1}^{a-1} k} = \frac{(a+n-1)!}{(a-1)!}. \end{aligned}$$

Commentaire. On a utilisé la convention du début : pour $a = 1$, $\prod_{k=1}^{a-1} k = 1 = (a-1)!$

Q4.* Raisonnons par analyse-synthèse.

ANALYSE. Supposons que (B.1) admette une solution développable en série entière

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n,$$

de rayon de convergence $R > 0$. y est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -R, R[$ et l'on peut dériver terme à terme : pour tout $x \in] -R, R[$,

$$\begin{aligned} y'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n, \\ y''(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n-1}, \end{aligned}$$

où l'on a choisi des formes adaptées aux calculs qui suivent. En reportant dans le premier membre de (B.1),

$$\begin{aligned} & x y''(x) + (c-x) y'(x) - a y(x) \\ &= x y''(x) + c y'(x) - x y'(x) - a y(x) \\ &= x \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^{n-1} + c \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\ &\quad - x \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - a \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n + c \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\ &\quad - \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^n - a \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) n a_{n+1} x^n + c \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n \\ &\quad - \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^n - a \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)(n+c) a_{n+1} - (n+a) a_n) x^n. \end{aligned}$$

Donc y est solution de (B.1) sur $] -R, R[$ si et seulement si pour tout $x \in] -R, R[$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} ((n+1)(n+c) a_{n+1} - (n+a) a_n) x^n = 0.$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, cela entraîne que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+1)(n+c) a_{n+1} - (n+a) a_n = 0,$$

ou encore, puisque $c \notin -\mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \frac{n+a}{(n+1)(n+c)} a_n.$$

Ainsi, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, en supposant que $a_k \neq 0$,

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a+k}{(k+1)(c+k)}.$$

En multipliant membre à membre,

$$\begin{aligned} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a_{k+1}}{a_k} &= \prod_{k=0}^{n-1} \frac{a+k}{(k+1)(c+k)} \\ &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (a+k)}{\prod_{k=0}^{n-1} (k+1) \cdot \prod_{k=0}^{n-1} (c+k)}, \end{aligned}$$

ou encore

$$\frac{a_n}{a_0} = \frac{[a]_n}{n! [c]_n}.$$

SYNTHÈSE. Soit $a_0 \in \mathbb{R}$. Considérons la série entière

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{[a]_n}{n! [c]_n} a_0.$$

Si $a_0 = 0$ ou si $a \in -\mathbb{N}$, d'après la question Q1, la suite (a_n) est nulle à partir d'un certain rang. Cela signifie que y est une fonction polynomiale, donc $R = +\infty$.

Sinon, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \neq 0$. Alors

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+a}{(n+1)(n+c)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0,$$

et d'après la règle de d'Alembert, $R = +\infty$.

Cela valide la synthèse.

CONCLUSION. L'équation (B.1) admet des solutions développables en série entière sur $\mathbb{R}$: elles forment une droite vectorielle engendrée par la fonction

$$M_{a,c} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[a]_n}{n! [c]_n} x^n.$$

Q5. Soit $x \in \mathbb{R}$. D'abord,

$$\begin{aligned} \Phi_0(x) &= e^{-x}, & \Phi_1(x) &= e^{-x} x, \\ \Phi_2(x) &= e^{-x} x^2, & \Phi_3(x) &= e^{-x} x^3. \end{aligned}$$

Dérivons, avec la formule de Leibniz bien-sûr :

$$\begin{aligned} \underline{L_0(x)} &= \frac{e^x}{0!} \Phi_0(x) = e^x e^{-x} = 1, \\ \underline{L_1(x)} &= \frac{e^x}{1!} \Phi_1'(x) = e^x e^{-x} (1-x) = 1-x, \\ \underline{L_2(x)} &= \frac{e^x}{2!} \Phi_2''(x) = \frac{e^x}{2} e^{-x} (2 - 2 \cdot 2x + x^2) \\ &= 1 - 2x + \frac{x^2}{2}, \\ \underline{L_3(x)} &= \frac{e^x}{3!} \Phi_3'''(x) \\ &= \frac{e^x}{6} e^{-x} (6 - 3 \cdot 6x + 3 \cdot 3x^2 - x^3) \\ &= 1 - 3x + 3 \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}. \end{aligned}$$

Q6. Avec la formule de Leibniz, pour tout $x \in \mathbb{R}$, sachant que pour $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\frac{d^p x^n}{dx^p} = n(n-1) \cdots (n-p+1) x^{n-p} = \frac{n!}{(n-p)!} x^{n-p},$$

on a

$$\begin{aligned} \underline{L_n(x)} &= \frac{e^x}{n!} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^n) \\ &= \frac{e^x}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{d^k e^{-x}}{dx^k} \frac{d^{n-k} x^n}{dx^{n-k}} \\ &= \frac{e^x}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k e^{-x} \frac{n!}{k!} x^k \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{x^k}{k!}. \end{aligned}$$

Où l'on voit bien que $\underline{L_n}$ est de degré n .

Q7. Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\underline{\Phi_n^{(n)}(x) = n! e^{-x} L_n(x)}.$$

Et en dérivant,

$$\underline{\Phi_n^{(n+1)}(x) = n! e^{-x} (L_n'(x) - L_n(x))}.$$

Q8. Par définition, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\underline{\Phi_{n+1}(x) = e^{-x} x^{n+1} = x e^{-x} x^n = x \Phi_n(x)}.$$

Alors, avec la formule de Leibniz et sachant que les dérivées de x d'ordre supérieur ou égal à 2 sont nulles,

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) &= \frac{d^{n+1} x \Phi_n(x)}{dx^{n+1}} \\ &= x \Phi_n^{(n+1)}(x) + (n+1) \cdot 1 \cdot \Phi_n^{(n)}(x). \end{aligned}$$

Avec la question Q7, on en tire que

$$\begin{aligned} (n+1)! e^{-x} L_{n+1}(x) \\ = x n! e^{-x} (L_n'(x) - L_n(x)) + (n+1) n! e^{-x} L_n(x), \end{aligned}$$

et en simplifiant par $(n+1)! e^{-x}$ qui ne s'annule pas,

$$\underline{L_{n+1}(x) = \left(1 - \frac{x}{n+1}\right) L_n(x) + \frac{x}{n+1} L_n'(x)}.$$

Q9. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a bien

$$\Phi_{n+1}^{(n+2)}(x) = (\Phi_{n+1}')^{(n+1)}(x).$$

D'une part, avec la question Q7,

$$\Phi_{n+1}^{(n+2)}(x) = (n+1)! e^{-x} (L_{n+1}'(x) - L_{n+1}(x)).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1}'(x) &= e^{-x} ((n+1)x^n - x^{n+1}) \\ &= (n+1)\Phi_n(x) - \Phi_{n+1}(x), \end{aligned}$$

donc, toujours avec la question Q7,

$$\begin{aligned} (\Phi_{n+1}')^{(n+1)}(x) &= (n+1)\Phi_n^{(n+1)}(x) - \Phi_{n+1}^{(n+1)}(x) \\ &= (n+1)(n! e^{-x} (L_n'(x) - L_n(x))) \\ &\quad - (n+1)! e^{-x} L_{n+1}(x) \\ &= (n+1)! e^{-x} (L_n'(x) - L_n(x) - L_{n+1}(x)). \end{aligned}$$

Alors, en simplifiant par $(n+1)! e^{-x}$ qui ne s'annule toujours pas,

$$L_{n+1}'(x) - L_{n+1}(x) = L_n'(x) - L_n(x) - L_{n+1}(x),$$

c'est-à-dire

$$\underline{L_{n+1}'(x) = L_n'(x) - L_n(x)}.$$

Q10. En dérivant l'expression de la question Q8, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} L_{n+1}'(x) &= -\frac{1}{n+1} L_n(x) + \left(1 - \frac{x}{n+1}\right) L_n'(x) \\ &\quad + \frac{1}{n+1} L_n'(x) + \frac{x}{n+1} L_n''(x). \end{aligned}$$

Avec la question Q9 et en passant tout dans le même membre,

$$\frac{x}{n+1} L_n''(x) + \frac{1-x}{n+1} L_n'(x) + \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) L_n(x) = 0,$$

d'où

$$(C.1) \quad \underline{x L_n''(x) + (1-x) L_n'(x) + n L_n(x) = 0}.$$

Q11.* L'équation (C.1) est identique à l'équation (B.1) avec $a = -n$ et $c = 1$. En outre, avec la question Q6, on voit que $L_n(0) = 1$. Comme L_n est polynomiale, elle est développable en série entière, donc elle appartient à la droite vectorielle déterminée à la question Q4. Alors, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $L_n = M_{-n,1}$ (avec les notations de la question Q4). Or $L_n(0) = 1 = M_{-n,1}(0)$, donc $\alpha = 1$ et $L_n = M_{-n,1}$.

$\underline{L_n}$ est bien une fonction hypergéométrique confluyente.