Corrigé du cinquième devoir à la maison

Q1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque les fonctions qui interviennent sont de classe $\mathscr{C}^1$, réalisons une intégration par parties :

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\\&= \left[f(t)\,\frac{\sin(nt)}{n}\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} f'(t)\,\frac{\sin(nt)}{n}\,\mathrm{d}t\\&= -\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Comme f' est continue sur le segment $[0, 2\pi]$, elle y est bornée : pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $|f'(t)| \leqslant \sup_{[0,2\pi]} |f'|$; et bien-sûr $|\sin(nt)| \leqslant 1$, donc

$$\begin{aligned}&\left|\int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t\right| = \frac{1}{n}\left|\int_0^{2\pi} f'(t)\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} |f'(t)|\,|\sin(nt)|\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} \sup_{[0,2\pi]} |f'|\,\mathrm{d}t\\&= \frac{2\pi}{n}\sup_{[0,2\pi]} |f'| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_0^{2\pi} f(t)\cos(nt)\,\mathrm{d}t = 0.}$

Q2. Notons $\Phi : x \mapsto \int_0^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$ la primitive de φ qui s'annule en 0, laquelle existe car φ est continue sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a, d'après la relation de Chasles,

$$\begin{aligned}\Phi(x + 2\pi) &= \int_0^{x+2\pi} \varphi(t)\,\mathrm{d}t\\&= \int_0^{2\pi} \varphi(t)\,\mathrm{d}t + \int_{2\pi}^{x+2\pi} \varphi(t)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Or $\int_0^{2\pi} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 0$. Alors, en posant $t = 2\pi + u$, qui est un changement de variable licite car bijectif et de classe $\mathscr{C}^1$, et sachant que φ est 2π-périodique,

$$\begin{aligned}\underline{\Phi(x + 2\pi)} &= \int_{2\pi}^{x+2\pi} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \varphi(2\pi + u)\,\mathrm{d}u\\&= \int_0^x \varphi(u)\,\mathrm{d}u \underline{= \Phi(x).}\end{aligned}$$

Ainsi, Φ est 2π-périodique.

Comme toute fonction périodique est bornée sur $\mathbb{R}$, Φ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Comme f et φ sont de classe $\mathscr{C}^1$, réalisons encore une intégration par parties :

$$\begin{aligned}&\int_a^b f(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\\&= \left[f(t)\,\frac{\Phi(nt)}{n}\right]_a^b - \int_a^b f'(t)\,\frac{\Phi(nt)}{n}\,\mathrm{d}t\\&= \frac{1}{n}\left(f(b)\Phi(nb) - f(a)\Phi(na) - \int_a^b f'(t)\Phi(nt)\,\mathrm{d}t\right).\end{aligned}$$

Comme f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur le segment $[a, b]$, f et f' y sont continues donc bornées : pour tout $t \in [a, b]$, $|f(t)| \leqslant \sup_{[a,b]} |f|$ et $|f'(t)| \leqslant \sup_{[a,b]} |f'|$. De même, Φ est bornée sur $\mathbb{R}$, donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\Phi(t)| \leqslant \sup_{\mathbb{R}} |\Phi|$. Alors

$$\begin{aligned}&\left|\int_a^b f(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right|\\&= \frac{1}{n}\left|f(b)\,\Phi(nb) - f(a)\,\Phi(na) - \int_a^b f'(t)\,\Phi(nt)\,\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant \frac{1}{n}\bigg(|f(b)|\,|\Phi(nb)| + |f(a)|\,|\Phi(na)|\\&\qquad + \int_a^b |f'(t)|\,|\Phi(nt)|\,\mathrm{d}t\bigg)\\&\leqslant \frac{1}{n}\left(2\sup_{[a,b]} |f| \sup_{\mathbb{R}} |\Phi| + \int_a^b \sup_{[a,b]} |f'| \sup_{\mathbb{R}} |\Phi|\,\mathrm{d}t\right)\\&= \frac{\sup_{\mathbb{R}} |\Phi|}{n}\left(2\sup_{[a,b]} |f| + (b-a)\sup_{[a,b]} |f'|\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t = 0.}$

Q3.* Soit $\varepsilon > 0$ comme dans l'énoncé : pour tout $t \in [\alpha, \beta]$,

$$|h(t) - g(t)| \leqslant \sup_{[\alpha,\beta]} |h - g| \leqslant \varepsilon.$$

D'une part,

$$\begin{aligned}&\left|\int_\alpha^\beta h(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t - \int_\alpha^\beta g(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right|\\&= \left|\int_\alpha^\beta (h(t) - g(t))\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant \int_\alpha^\beta |h(t) - g(t)|\,|\varphi(nt)|\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Comme φ est bornée sur $\mathbb{R}$, puisqu'elle est 2π-périodique, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $|\varphi(t)| \leqslant M$ en posant $M = \sup_{\mathbb{R}} |\varphi|$. Alors

$$\begin{aligned}&\left|\int_\alpha^\beta h(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t - \int_\alpha^\beta g(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant \int_\alpha^\beta \varepsilon M\,\mathrm{d}t = \varepsilon M\,(\beta - \alpha).\end{aligned}$$

D'autre part, en minorant par la seconde inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}&\left|\int_\alpha^\beta h(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t - \int_\alpha^\beta g(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right|\\&\geqslant \left|\,\left|\int_\alpha^\beta h(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right| - \left|\int_\alpha^\beta g(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right|\,\right|\\&\geqslant \left|\int_\alpha^\beta h(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right| - \left|\int_\alpha^\beta g(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right|.\end{aligned}$$

Alors

$$\left|\int_\alpha^\beta h(t)\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right| - \left|\int_\alpha^\beta g(t)\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \varepsilon M(\beta - \alpha),$$

ou encore

$$\boxed{\left|\int_\alpha^\beta h(t)\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M(\beta - \alpha)\varepsilon + \left|\int_\alpha^\beta g(t)\varphi(nt)\,\mathrm{d}t\right|.}$$

Supposons f continue par morceaux sur $[a, b]$: il existe une subdivision $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_p = b$ telle que pour tout $i \in [\![0, p-1]\!]$, $f|_{]a_i, a_{i+1}[}$ soit continue et se prolonge en une fonction continue sur $[a_i, a_{i+1}]$, que l'on notera $\widetilde{f}_i$. Par définition de l'intégrale d'une fonction continue par morceaux,

$$\int_a^b f(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{p-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \widetilde{f}_i(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t.$$

Comme il s'agit d'une somme finie, pour montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t = 0,$$

il suffit de montrer que pour tout $i \in [\![0, p-1]\!]$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{a_i}^{a_{i+1}} \widetilde{f}_i(t)\,\varphi(nt)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Soit $i \in [\![0, p-1]\!]$. Prouver la limite précédente revient à prouver que

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \ \left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} \widetilde{f}_i(t)\, \varphi(n\,t)\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \varepsilon.$$

Soit donc $\varepsilon > 0$. D'après le théorème de Weierstrass, il existe une suite $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de fonctions polynomiales qui converge uniformément sur $[a_i, a_{i+1}]$ vers $\widetilde{f}_i$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} \|\widetilde{f}_i - P_k\|_\infty^{[a_i,a_{i+1}]} = 0$, ou encore

$$\forall \eta > 0, \exists K \in \mathbb{N}, \forall k \geqslant K, \ \sup_{[a_i,a_{i+1}]} |\widetilde{f}_i - P_k| \leqslant \eta.$$

Utilisons le début de la question pour $\alpha = a_i$, $\beta = a_{i+1}$, $h = \widetilde{f}_i$, $g = P_k$ et $\varepsilon = \eta$ (l'ε du début de la question, pas celui que l'on vient récemment d'introduire) :

$$\left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} \widetilde{f}_i(t)\, \varphi(n\,t)\, \mathrm{d}t \right| \leqslant M\,(a_{i+1} - a_i)\,\eta + \left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} P_k(t)\, \varphi(n\,t)\, \mathrm{d}t \right|.$$

Choisissons $\eta = \dfrac{\varepsilon}{2\,(M+1)\,(a_{i+1}-a_i)}$, avec l'$\varepsilon$ récemment introduit. Ce choix est permis puisque η est quelconque ; il est purement cosmétique, et il est motivé par le fait qu'alors

$$M\,(a_{i+1} - a_i)\,\eta = \frac{M\,(a_{i+1}-a_i)\,\varepsilon}{2\,(M+1)\,(a_{i+1}-a_i)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

La présence du $M+1$ permet d'éviter de traiter séparément le cas où $M = 0$.

Pour ce choix de η, il existe donc $K \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant K$,

$$\sup_{[a_i,a_{i+1}]} |\widetilde{f}_i - P_k| \leqslant \eta.$$

Choisissons et fixons un tel k. Comme P_k est polynomiale, elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a_i, a_{i+1}]$ donc d'après la question Q2,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{a_i}^{a_{i+1}} P_k(t)\, \varphi(n\,t)\, \mathrm{d}t = 0.$$

Alors, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geqslant N$,

$$\left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} P_k(t)\, \varphi(n\,t)\, \mathrm{d}t \right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}\left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} \widetilde{f}_i(t)\, \varphi(n\,t)\, \mathrm{d}t \right| &\leqslant M\,(a_{i+1} - a_i)\,\eta + \left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} P_k(t)\, \varphi(n\,t)\, \mathrm{d}t \right| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

ce que l'on voulait. Finalement,

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(t)\, \varphi(n\,t)\, \mathrm{d}t = 0.}$$

Commentaire. Cette question, digne d'un sujet d'ENS, est proprement délirante, et sans être hors-programme à proprement parler, elle n'est pas du tout dans l'esprit du programme de PSI.

Q4. Soit $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(t) \sin^2(n\,t)\, \mathrm{d}t &= \int_a^b f(t)\, \frac{1 - \cos(2\,n\,t)}{2}\, \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t - \frac{1}{2} \int_a^b f(t) \cos(2\,n\,t)\, \mathrm{d}t \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2} \int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

En effet, la fonction $t \mapsto \cos(2nt)$ est continue, 2π-périodique et $\int_0^{2\pi} \cos(2\,n\,t)\, \mathrm{d}t = 0$, donc nous sommes bien dans les conditions d'application de la question Q3, sachant que f est continue par morceaux sur $[a, b]$.

Q5. Pour commencer, les fonctions $t \mapsto F(t)/t^2$ et $t \mapsto f(t)/t$ sont continue sur $[a, +\infty[$.

Puisque F est bornée sur $\mathbb{R}_+$, pour tout $t \geqslant a$,

$$\left| \frac{F(t)}{t^2} \right| = \frac{|F(t)|}{t^2} \leqslant \frac{\sup_{\mathbb{R}_+} |F|}{t^2}.$$

Or la fonction $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[a, +\infty[$ d'après les intégrales de Riemann, car $a > 0$ et $2 > 1$. Donc par comparaison, $t \mapsto F(t)/t^2$ est aussi intégrable sur $[a, +\infty[$ et

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

Les fonctions f et $t \mapsto 1/t$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a, +\infty[$. Faisons une intégration par parties :

$$\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, \mathrm{d}t = \left[\frac{F(t)}{t} \right]_a^{+\infty} + \int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t.$$

Cette égalité sera valide si deux des trois écritures ont un sens, auquel cas la troisième en aura un aussi. Or on vient de voir que la dernière intégrale a un sens. De plus, comme F est bornée,

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{F(t)}{t} = 0$$

donc le crochet a un sens et vaut

$$\left[\frac{F(t)}{t} \right]_a^{+\infty} = \lim_{t\to+\infty} \frac{F(t)}{t} - \frac{F(a)}{a} = -\frac{F(a)}{a}.$$

Alors, d'après le théorème d'intégration par parties,

$$\boxed{\text{l'intégrale } \int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, \mathrm{d}t \text{ converge}}$$

et

$$\boxed{\int_a^{+\infty} \frac{f(t)}{t}\, \mathrm{d}t = -\frac{F(a)}{a} + \int_a^{+\infty} \frac{F(t)}{t^2}\, \mathrm{d}t.}$$

Q6. Les fonctions $t \mapsto \sin t/t$ et $t \mapsto \sin^2 t/t^2$ sont continues sur $]0, +\infty[$. Toutes les deux tendent vers 1 en 0, donc elles sont prolongeables par continuité en 0, donc elles sont intégrables sur $]0, 1]$.

Pour tout $t \geqslant 1$, $\left| \dfrac{\sin^2 t}{t^2} \right| \leqslant \dfrac{1}{t^2}$, où $t \mapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ donc $t \mapsto \sin^2 t/t^2$ l'est aussi, donc elle l'est sur $]0, +\infty[$ et

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, \mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

En appliquant la question Q5 à la fonction $f = \sin$, sachant que $F = 1 - \cos$ est bornée sur $\mathbb{R}$, qui est la primitive de f nulle en 0, on voit que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$ converge, donc

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t \text{ converge.}}$$

Faisons un calcul formel que l'on justifiera ensuite :

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 t}{t^2}\, \mathrm{d}t \\ (1) \quad &= \left[-\frac{\sin^2 t}{t} \right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin t \cos t}{t}\, \mathrm{d}t \\ (2) \quad &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(2t)}{t}\, \mathrm{d}t \\ (3) \quad &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u}\, \mathrm{d}u. \end{aligned}$$

Justifions les trois étapes.

(1) C'est une simple intégration par parties, licite car tous les termes manipulés ont un sens.

(2) Oui, grâce à la trigonométire.

(3) Oui, en posant $u = 2t$, qui est un changement de variable licite car il est bijectif et de classe $\mathscr{C}^1$.

Q7.* Appliquons le théorème de la continuité d'une intégrale à paramètre. Posons $A = \mathbb{R}_+$, $I = \mathbb{R}_+$ et

$$g : A \times I \to \mathbb{C},\ (x,t) \mapsto f(t)\,e^{-xt}.$$

∘ Pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x,t)$ est continue sur A par opérations usuelles.

∘ Pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur I par opérations usuelles.

∘ Pour tout $(x,t) \in A \times I$,

$$|g(x,t)| = |f(t)|\,e^{-xt} \leqslant |f(t)|\,.$$

Par hypothèse, $|f|$ est continue et intégrable sur I, donc elle constitue une domination valide.

Alors, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre,

• pour tout $x \in A$, $t \mapsto g(x,t)$ est intégrable sur I, ce qui signifie que $\boxed{\mathscr{L}(f) \text{ est bien définie sur } A\,;}$

• $\boxed{\mathscr{L}(f) \text{ est continue sur } A.}$

Q8.* Appliquons le théorème de la classe $\mathscr{C}^\infty$ des intégrales à paramètre. Posons $A' = \mathbb{R}_+^*$.

∘ Pour tout $t \in I$, $x \mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur A' par opérations usuelles. De plus, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tout $(x,t) \in A' \times I$,

$$\frac{\partial^p g}{\partial x^p}(x,t) = (-t)^p\,f(t)\,e^{-xt}.$$

∘ On a vu ci-dessus que pour tout $x \in A'$, $t \mapsto g(x,t)$ est continue et intégrable sur I.

∘ Pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $x \in A'$, $t \mapsto \dfrac{\partial^p g}{\partial x^p}(x,t)$ est continue sur I par opérations usuelles.

∘ Soit $p \in \mathbb{N}^*$, soit un segment $[a,b] \subset A'$ avec $0 < a < b$, soient $x \in [a,b]$ et $t \in I$: puisque f est bornée sur I,

$$\left|\frac{\partial^p g}{\partial x^p}(x,t)\right| = t^p\,|f(t)|\,e^{-xt} \leqslant \|f\|_\infty^I\,t^p\,e^{-at}.$$

D'une part, $t^p e^{-at} = (t^p e^{-at/2})e^{-at/2}$. D'autre part, $a/2 > 0$ donc $\lim_{t\to+\infty} t^p\,e^{-at/2} = 0$. Donc $t^p\,e^{-at} \ll_{+\infty} e^{-at/2}$. Comme $a/2 > 0$, $t \mapsto e^{-at/2}$ est intégrable sur I, donc $t \mapsto t^p\,e^{-at}$ l'est aussi. Alors $\dfrac{\partial^p g}{\partial x^p}$ vérifie l'hypothèse de domination locale.

Alors, en vertu du théorème annoncé,

• pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in A'$, $t \mapsto \dfrac{\partial^p g}{\partial x^p}(x,t)$ est intégrable sur I ;

• $\boxed{\mathscr{L}(f) \text{ est de classe } \mathscr{C}^\infty \text{ sur } A'\,;}$

• pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in A'$,

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(f)^{(p)}(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial^p g}{\partial x^p}(x,t)\,\mathrm{d}t\\ &= (-1)^p \int_0^{+\infty} t^p\,f(t)\,e^{-xt}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Soit $x \in A'$. On a

$$\begin{aligned}|\mathscr{L}(f)(x)| &\leqslant \int_0^{+\infty} |f(t)|\,e^{-xt}\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \int_0^{+\infty} \|f\|_\infty^I\,e^{-xt}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{\|f\|_\infty^I}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0,\end{aligned}$$

ce qui signifie que $\boxed{\lim_{+\infty} \mathscr{L}(f) = 0.}$

Q9.1.* La fonction f proposée est bornée sur I donc $\mathscr{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ donc $\mathscr{C}^2$ sur A'. Pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}&\mathscr{L}(f)''(x) + \mathscr{L}(f)(x)\\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t^2\,e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_0^{+\infty} \frac{(t^2+1)\,e^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x}.\end{aligned}$$

$\boxed{\mathscr{L}(f) \text{ est solution sur } A' \text{ de } (E).}$

Q9.2. Posons $y = \alpha\cos + \beta\sin$ où α et β sont de classe $\mathscr{C}^1$ et $\alpha'\cos + \beta'\sin = 0$. Alors

$$\begin{aligned}y' &= \alpha'\cos - \alpha\sin + \beta'\sin + \beta\cos\\ &= -\alpha\sin + \beta\cos,\\ y'' &= -\alpha'\sin - \alpha\cos + \beta'\cos - \beta\sin.\end{aligned}$$

Posons $b : x \mapsto 1/x$. En reportant dans (E), on a

$$y'' + y = b \iff -\alpha'\sin + \beta'\cos = b.$$

Ainsi, en reprenant la condition de l'énoncé,

$$\begin{cases} \alpha'\cos + \beta'\sin = 0,\\ -\alpha'\sin + \beta'\cos = b,\end{cases} \iff \begin{cases} \alpha' = -b\sin,\\ \beta' = \ \ b\cos.\end{cases}$$

Ainsi, pour tout $x > 0$, $\alpha'(x) = -\dfrac{\sin x}{x}$. Donc en choisissant arbitrairement $a > 0$,

$$\alpha(x) = \alpha(a) - \int_a^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

D'après la question Q5, $t \mapsto \sin t/t$ a une intégrale convergente sur $[a,+\infty[$, donc en posant toujours arbitrairement

$$\alpha(a) = \int_a^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$$

on a

$$\boxed{\begin{aligned}\alpha(x) &= \int_a^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t - \int_a^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\\ &= \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}}$$

Ces choix arbitraires sont possibles car les primitives de α' sont définies à une constante additive près et que l'on cherche une solution particulière de (E).

De même, $\beta'(x) = \dfrac{\cos x}{x}$. Avec le même choix arbitraire de $a > 0$,

$$\beta(x) = \beta(a) + \int_a^x \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t,$$

et en choisissant $\beta(a) = -\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t$, on a

$$\boxed{\beta(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t.}$$

Q9.3. La solution particulière que l'on a trouvée s'écrit donc, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} y(x) &= \alpha(x)\cos x + \beta(x)\sin x \\ &= \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right)\cos x \\ &\quad - \left(\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\right)\sin x \\ &= \int_x^{+\infty} \frac{\sin t\cos x - \cos t\sin x}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{x+u}\,\mathrm{d}u, \end{aligned}$$

où l'on a posé $u = t - x$, qui est un changement de variable licite car bijectif et de classe $\mathscr{C}^1$.

Ainsi, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t$ est bien une solution particulière de (E) sur A'.

Q9.4. Comme $\mathscr{L}(f)$ est solution de (E) sur A', elle est somme de cette solution particulière et d'une solution de l'équation homogène

$$(H) \qquad y'' + y = 0,$$

dont les solutions sont classiquement les fonctions $a\cos + b\sin$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Ainsi, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x > 0$,

$$\mathscr{L}(f)(x) = a\cos x + b\sin x + \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

Q10. On a vu que pour $x > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t = \left(\int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right)\cos x - \left(\int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t\right)\sin x.$$

Les fonctions cos et sin sont bornées sur $\mathbb{R}$ et les deux intégrales tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$, comme restes d'intégrales convergentes. Alors

$$\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t = 0.$$

D'après la question Q8, $\mathscr{L}(f)$ tend vers 0 en $+\infty$, donc

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\mathscr{L}(f)(x) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t\right) = 0.$$

Mais d'après la question Q9.4, cette différence vaut $a\cos x + b\sin x$, donc elle ne peut tendre vers 0 que si $a = b = 0$. Ainsi,

$$\forall x > 0,\ \mathscr{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

Q11. Soit $x > 0$. On a

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x+t} - \frac{1}{t}\right)\sin t\,\mathrm{d}t \\ &= -x\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t\,(x+t)}\,\mathrm{d}t \\ &= -x\int_0^{1} \frac{\sin t}{t\,(x+t)}\,\mathrm{d}t - x\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t\,(x+t)}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

D'une part, comme pour tout $t > 0$, $\left|\dfrac{\sin t}{t}\right| \leqslant 1$,

$$\begin{aligned} \left|-x\int_0^{1} \frac{\sin t}{t\,(x+t)}\,\mathrm{d}t\right| &\leqslant x\int_0^{1} \left|\frac{\sin t}{t}\right| \frac{\mathrm{d}t}{x+t} \\ &\leqslant x\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}t}{x+t} = x\Big[\ln(x+t)\Big]_0^1 \\ &= x\ln(1+x) - x\ln(x) \xrightarrow[x\to0]{} 0. \end{aligned}$$

D'autre part, comme pour tout $t > 0$, $|\sin t| \leqslant 1$, et en minorant x par 0 au dénominateur,

$$\left|-x\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t\,(x+t)}\,\mathrm{d}t\right| \leqslant x\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2} = x \xrightarrow[x\to0]{} 0.$$

Alors $\displaystyle\lim_{x\to0} \left(\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\right) = 0,$

ou encore $\displaystyle\lim_{x\to0} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t.$

Q12. Ainsi

$$\lim_{x\to0} \mathscr{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t,$$

puisque d'après la question Q10, pour tout $x > 0$,

$$\mathscr{L}(f)(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

Mais d'après la question Q7, $\mathscr{L}(f)$ est continue sur A, donc en particulier en 0 et

$$\begin{aligned} \lim_{x\to0} \mathscr{L}(f)(x) = \mathscr{L}(f)(0) &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ &= \Big[\operatorname{Arctan} t\Big]_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}.$