Sixième devoir à la maison

Problème

[MP04]

Soit S l'ensemble des suites réelles $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont tous les termes u_n sont positifs ou nuls et la somme égale à 1 :

$$S = \Big\{ U \mid U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \forall n,\ u_n \geqslant 0,\ \sum_{n=0}^{\infty} u_n = 1 \Big\}.$$

Soit F l'ensemble des fonctions réelles f telles qu'il existe une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont tous les termes a_n sont positifs ou nuls, la somme égale à 1, et que pour tout $x \in]-1,1]$ au moins, l'on ait

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n :$$

$$F = \Big\{ f \mid \exists (a_n)_{n\in\mathbb{N}},\ \sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1,\ \forall n,\ a_n \geqslant 0,\quad \forall x \in]-1,1],\ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Big\}.$$

À une suite $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, appartenant à S, est associée la fonction f définie par la relation suivante :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n x^n.$$

Soit j l'application ainsi définie : $U \mapsto f = j(U)$; la fonction $j(U)$ est notée $\widehat{U}$.

Propriétés des fonctions de F et des suites de S :

1. Démontrer que toute fonction f, qui appartient à l'ensemble F, est, sur l'intervalle ouvert $I =]-1,1[$, une fonction indéfiniment dérivable, croissante sur le segment $[0,1]$.

2. Démontrer que toute fonction f, qui appartient à l'ensemble F, est continue à gauche en 1.

Exemples : soient G, E^q et V les trois suites définies par les relations suivantes :

— G est la suite géométrique de terme général $g_n = 1/2^{n+1}$:

$$G = \left(\frac{1}{2^{n+1}}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

— Étant donné un entier naturel q, E^q est la suite dont tous les termes sont nuls sauf le terme de rang q égal à 1 :

$$E^q = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots).$$

— $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de réels définie par les relations suivantes : $v_0 = 1/2$;

$$\text{pour } n \geqslant 1,\ v_n = \frac{a}{n^2} \text{ avec } a = \left(2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\right)^{-1}.$$

3. Montrer que les suites G, E^q et V sont dans S. Déterminer les images $\widehat{G} = j(G)$, $\widehat{E^q} = j(E^q)$ des suites G et E^q ; calculer la dérivée $\widehat{V}'$ de la fonction $\widehat{V} = j(V)$ image de la suite V ; puis donner l'expression de $\widehat{V}(x)$ à l'aide d'une intégrale.

4. Soit f une fonction appartenant à l'ensemble F.

Démontrer que, si la fonction f est nulle en 0 ($f(0) = 0$), la fonction f est, soit égale à x sur le segment $[0,1]$, soit strictement majorée par x sur l'intervalle ouvert $]0,1[$ ($0 < x < 1 \Longrightarrow f(x) < x$).

Démontrer que, si la fonction f est strictement positive en 0 ($f(0) > 0$), l'équation

$$f(x) = x$$

a, dans l'intervalle ouvert $]0,1[$, au plus une solution.

5. Démontrer que, pour toute suite U appartenant à l'ensemble S, la fonction $j(U)$ appartient à l'ensemble F. Démontrer que l'application j est une application bijective de l'ensemble S sur l'ensemble F.

Une loi de composition dans l'ensemble S :

Étant données deux suites $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $V = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ appartenant à l'ensemble S, soit $U * V$ la suite, dont les termes w_n, $n \in \mathbb{N}$, sont définis par la relation suivante :

$$w_n = \sum_{p=0}^{n} u_p v_{n-p}.$$

6. Démontrer que la suite $U * V = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ainsi définie appartient à l'ensemble S.

7. Démontrer qu'étant données deux suites U et V de S, à la composée $U * V$ de ces suites correspond par l'application j le produit des fonctions $j(U)$ et $j(V)$:

$$j(U * V) = j(U)j(V) \text{ ou } \widehat{U * V} = \widehat{U} \cdot \widehat{V}.$$

8. Démontrer que la loi de composition $*$ définie ci-dessus est associative, a un élément neutre et est commutative.

Étant donnés un réel p, strictement compris entre 0 et 1 ($0 < p < 1$) et un réel λ strictement positif, soient B^p, Γ^p et Π^λ les suites définies de la manière suivante :

— B^p est la suite dont tous les termes β_n^p, $n \in \mathbb{N}$, sont nuls sauf les deux premiers : $\beta_0^p = 1 - p$ et $\beta_1^p = p$; $B^p = (1-p, p, 0, 0, \dots)$.

— Γ^p est la suite de terme général $\gamma_n^p = (1-p)p^n$, $n \in \mathbb{N}$: $\Gamma^p = ((1-p)p^n)_{n\in\mathbb{N}}$.

— Π^λ est la suite de terme général $\pi_n^\lambda = \frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}$, $n \in \mathbb{N}$:

$$\Pi^\lambda = \left(\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

9. Démontrer que les trois suites B^p, Γ^p et Π^λ appartiennent à l'ensemble S. Déterminer leurs images $\widehat{B^p}$, $\widehat{\Gamma^p}$ et $\widehat{\Pi^\lambda}$ par l'application j.