

Corrigé du sixième devoir à la maison

1. Soit $f \in F$. Il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 1$ et pour tout $x \in I$, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, nommons $f_n : x \mapsto a_n x^n$, de sorte que $f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n$.

DÉFINITION. Comme $f \in F$, elle est au moins définie sur $] -1, 1[$.

CROISSANCE. Elle ne nécessite pas de dériver f . En effet, les f_n sont toutes croissantes sur $[0, 1]$, car les a_n sont positifs. Soient donc $N \in \mathbb{N}$ et $x \leq y$ dans $[0, 1]$. On a $\sum_{n=0}^N f_n(x) \leq \sum_{n=0}^N f_n(y)$ donc en passant à la limite, $f(x) \leq f(y)$ et f croît sur $[0, 1]$.

CLASSE $\mathcal{C}^\infty$. Par définition, f est la somme sur I d'une série entière, donc elle y est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2. Pour tout $x \in [0, 1]$, $|a_n x^n| \leq a_n$. Comme $\sum a_n$ converge, la série de fonctions $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0, 1]$.

Donc f est continue sur $[0, 1]$ et en particulier à gauche en 1.

3. * La série $\sum_{n \geq 0} 1/2^{n+1}$ converge comme série géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $\frac{1}{2}$, et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Donc $G \in S$.

De même, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série géométrique $\sum x^n/2^{n+1}$ de raison $x/2$ converge si et seulement si $|x/2| < 1$ et pour tout $x \in]-2, 2[$,

$$\widehat{G}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{x}{2}} = \frac{1}{2-x}.$$

* E^q est une suite à termes positifs ou nuls, tous nuls à partir d'un certain rang, donc la série correspondante converge; sa somme vaut évidemment 1.

Donc $E^q \in S$.

Clairement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\widehat{E^q}(x) = x^q$.

* La série de terme général a/n^2 converge et

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a}{n^2} = a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi $\sum_{n=0}^{\infty} v_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ et comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$, $V \in S$.

Soit $x \in I$. Comme $\widehat{V}$ est la somme d'une série entière, elle se dérive terme à terme :

$$\widehat{V}'(x) = a \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}.$$

Clairement, $\widehat{V}'(0) = a$ et si $x \neq 0$,

$$\widehat{V}'(x) = \frac{a}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n},$$

où l'on reconnaît le développement en série entière de $-\ln(1-x)$:

$$\widehat{V}'(x) = \begin{cases} -a \frac{\ln(1-x)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ a & \text{sinon.} \end{cases}$$

Malgré les apparences, puisque $\widehat{V}'$ est somme d'une série entière, elle est en particulier continue sur I . Alors, $\widehat{V}$ en est une primitive, ce qui valide l'écriture suivante :

$$\widehat{V}(x) = \frac{1}{2} - a \int_0^x \frac{\ln(1-t)}{t} dt.$$

4. Soit $f \in F$. Il existe une suite (a_n) de réels positifs telle que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ et } \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 1.$$

De plus, comme somme d'une série entière, on peut dériver f terme à terme deux fois :

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$\text{et } f''(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

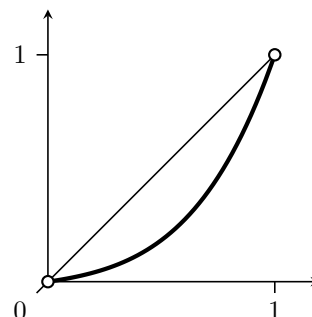
On voit que $f'' \geq 0$ donc f est convexe sur $[0, 1]$.

CAS OÙ $f(0) = 0$. Ici, $f(0) = a_0 = 0$. Discutons selon la valeur de $a_1 = f'(0)$.

* Si $a_1 = 1$, comme $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1$, pour tout $n \geq 2$, $a_n = 0$ et pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = x$.

* Si $a_1 < 1$, il existe $k \geq 2$ tel que $a_k > 0$. Alors pour tout $x \in]0, 1[$, $f''(x) \geq k(k-1)x^{k-2} > 0$. Donc f est strictement convexe sur $]0, 1[$ et son graphe est strictement en dessous de la corde reliant les points $(0, f(0)) = (0, 0)$ et $(1, f(1)) = (1, 1)$, c'est-à-dire la première bissectrice : pour tout $x \in]0, 1[$, $f(x) < x$.

Voici l'allure du graphe de f dans ce cas :



CAS où $f(0) > 0$. Ici, $f(0) = a_0 > 0$. Discutons encore selon a_1 .

* Si $a_0 + a_1 = 1$, pour tout $n \geq 2$, $a_n = 0$ et pour tout $x \in [0, 1]$, $f(x) = a_0 + a_1 x$. Le graphe de f est le segment reliant les points $(0, a_0)$ et $(1, 1)$, lequel est strictement au dessus de la première bissectrice sur $]0, 1[$, car $a_0 > 0$: l'équation $f(x) = x$ n'a aucune solution sur $]0, 1[$.

* Si $a_0 + a_1 < 1$, comme plus haut il existe $k \geq 2$ tel que $a_k > 0$ et $f''(x) > 0$ sur $]0, 1[$. Donc f y est encore strictement convexe.

Raisonnons par l'absurde en supposant que l'équation $f(x) = x$ admet au moins deux solutions sur $]0, 1[$. Nommons a et b deux d'entre elles, avec $a < b$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que

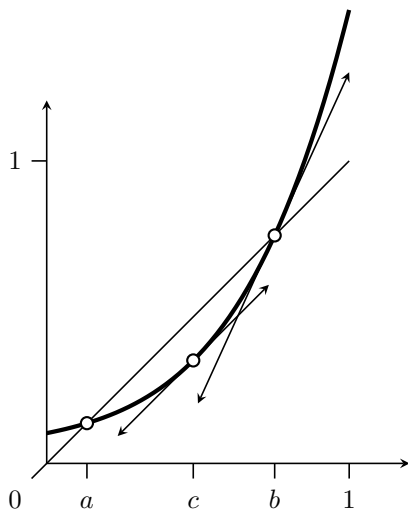
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 1,$$

car $f(a) = a$ et $f(b) = b$. Comme $f'' > 0$, f' croît strictement, donc $f'(b) > f'(c) = 1$. Cela entraîne que la tangente en b est strictement au dessus de la bissectrice sur $]b, 1[$. Enfin, toujours par stricte convexité de f , le graphe de f est strictement au dessus de cette tangente. Il s'ensuit que $f(1) > 1$: c'est la contradiction attendue, car $f(1) = 1$.

Par l'absurde, il faut donc rejeter l'hypothèse que l'équation $f(x) = x$ admet au moins deux solutions sur $]0, 1[$.

Ainsi, quand $f(0) > 0$, l'équation $f(x) = x$ admet au plus une solution dans $]0, 1[$.

Voici l'allure du graphe de f dans ce cas :



5. Soit $U \in S$. Comme $\sum_{n=0}^{\infty} u_n = 1$, la série numérique $\sum u_n$ converge et pour tout $x \in [-1, 1]$, $|u_n x^n| = u_n |x|^n \leq u_n$ donc la série numérique $\sum u_n x^n$ converge, donc $j(U) \in F$.

Soit $f \in F$: par définition, il existe $A = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $f = j(A)$ et $A \in S$, donc j est surjective. Supposons que $f = j(U) = j(V)$ où U et V sont dans S . Cela signifie que f est la somme de deux séries entières. Par unicité du développement en série

entière d'une fonction développable en série entière, ici f , les coefficients de ces deux développements sont égaux, donc $U = V$ et j est injective.

Finalement, j est une bijection de S sur F .

6. On reconnaît que $\sum w_n$ est la série produit de Cauchy des séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$, qui convergent absolument, donc elle converge absolument et

$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n \right) = 1,$$

donc $U * V \in S$.

7. De même, pour $x \in]-1, 1[$, le produit de Cauchy des séries $\sum u_n x^n$ et $\sum v_n x^n$ est la série de terme général $\sum_{k=0}^n u_k x^k v_{n-k} x^{n-k} = w_n x^n$. Comme les séries définissant $j(U)$ et $j(V)$ convergent absolument, il en est de même pour la série définissant $j(U * V)$, et $j(U * V) = j(U)j(V)$.

8. On a vu que l'application j est bijective. De plus, dans F , le produit des fonctions est associatif, commutatif et possède un élément neutre, la fonction constante $x \mapsto 1$. Alors, par transport de structure,

la loi $*$ est associative, commutative et admet la suite $E^0 = j^{-1}(1)$ comme élément neutre.

9. * Les coefficients de chacune des suites étant clairement positifs, il suffit de calculer leur somme :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n^p &= \beta_0^p + \beta_1^p = 1 - p + p = 1, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^p &= (1 - p) \sum_{n=0}^{\infty} p^n = (1 - p) \frac{1}{1 - p} = 1, \\ \sum_{n=0}^{\infty} \pi_n^p &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1. \end{aligned}$$

* Clairement,

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \widehat{B^p}(x) = 1 - p + px.$$

* Soit $x \in \mathbb{R}$. La série géométrique $\sum \gamma_n^p x^n$, de premier terme $1 - p$ et de raison px , converge si et seulement si $|px| < 1$, c'est-à-dire $x \in]-\frac{1}{p}, \frac{1}{p}[$, et dans ce cas,

$$\widehat{\Gamma^p}(x) = (1 - p) \sum_{n=0}^{\infty} p^n x^n = \frac{1 - p}{1 - px}.$$

* Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $x = 0$, $\sum \pi_n^p x^n$ converge, et si $x \neq 0$,

$$\left| \frac{\pi_{n+1}^p x^{n+1}}{\pi_n^p x^n} \right| = \frac{\lambda |x|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 < 1,$$

donc d'après la règle de d'Alembert, $\sum \pi_n^p x^n$ converge absolument. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{\Pi^\lambda}(x) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n x^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda x} = e^{-\lambda(1-x)}.$$