# Septième devoir à la maison

#### [E3A13] **Durée 3h**

#### L'usage de calculatrices est interdit.

Les trois parties sont relativement indépendantes.

Les questions étoilées sont réservées aux 5/2 et aux 3/2 aventureux.

#### Préambule

On rappelle la définition des fonctions cosinus hyperbolique et sinus hyperbolique. Pour tout  $t\in\mathbb{R},$  on pose :

$$ch(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2}, \ sh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2}.$$

- a) Préciser un équivalent simple de ch(t) et de sh(t) lorsque le réel t tend vers  $+\infty$ .
- b) Établir les tableaux de variation (avec les limites aux bornes) des deux fonctions définies sur  $]0, +\infty[$ :

$$g_1: t \mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \text{ et } g_2: t \mapsto \frac{t}{\operatorname{sh}(t)}.$$

## Partie I : intégrales et développements en série

**I-1.1.** Justifier, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'existence de

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n e^{-t} \, \mathrm{d}t.$$

- **I-1.2.** Déterminer une relation entre  $I_{n+1}$  et  $I_n$ .
- **I-1.3.** Calculer  $I_0$ . En déduire la valeur de  $I_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
- **I-1.4.** En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $\alpha > 0$ , la valeur de

$$\int_0^{+\infty} t^n e^{-\alpha t} dt.$$

**I-2.1.** Justifier que pour tout  $t \ge 0$ , on a

$$\frac{e^t}{2} \leqslant \operatorname{ch}(t) \leqslant e^t.$$

**I-2.2.** En déduire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , l'existence de

$$C_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{\operatorname{ch}(t)} \, \mathrm{d}t,$$

ainsi qu'un encadrement du rapport  $\frac{C_n}{I_n}$ .

**I-2.3.** Grâce au calcul de la dérivée de la fonction  $t \mapsto \operatorname{Arctan}(e^t)$ , calculer  $C_0$ .

**I-2.4.** Justifier, pour tout réel t > 0, l'égalité

$$\frac{1}{2\operatorname{ch}(t)} = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k e^{-(2k+1)t}.$$

I-2.5. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ C_n = 2(n!) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^{n+1}}.$$

- **I-2.6.** Montrer que l'égalité précédente reste valable pour n=0.
- **I-3.1.** Montrer, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , l'existence de

$$S_n = \int_0^{+\infty} \frac{t^n}{\sinh(t)} \, \mathrm{d}t.$$

**I-3.2.** Justifier, pour tout réel t > 0, l'égalité

$$\frac{1}{2\operatorname{sh}(t)} = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-(2k+1)t}.$$

I-3.3. En déduire

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ S_n = 2(n!) \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{(2k+1)^{n+1}}.$$

### Partie II: intégrales à paramètre

**II-1.** Pour tout réel x, on pose

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{\operatorname{ch}(t)} \, \mathrm{d}t.$$

- **II-1.1.\*** Montrer que F est définie et de classe  $\mathscr{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ , et pour tout réel x, exprimer F'(x) sous forme d'une intégrale.
- **II-1.2.** Montrer que F est développable en série entière sur l'intervalle ]-1,1[. Justifier grâce à **I-2.2** que le rayon de convergence de ce développement vaut 1. Pour cela, on exprimera d'abord  $e^{ixt}$  comme somme d'une série.
- **II-1.3.** En effectuant une intégration par parties, majorer  $|x\,F(x)|$  indépendamment du réel x. En déduire  $\lim_{x\to+\infty}F(x)$ .
- II-2. Pour tout réel x, on pose

$$H(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{\operatorname{ch}(t)} \, \mathrm{d}t.$$

**II-2.1.** Soient t > 0 et  $n \in \mathbb{N}$ . En utilisant **I-2.4**, justifier que

$$\left| \frac{1}{2\operatorname{ch}(t)} - \sum_{k=0}^{n} (-1)^k e^{-(2k+1)t} \right| \leqslant e^{-(2n+3)t}.$$

**II-2.2.** En déduire que pour tout réel x et tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\left| H(x) - \sum_{k=0}^{n} 2(-1)^k \left( \int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t} \cos(xt) dt \right) \right|$$
  

$$\leq 2 \int_0^{+\infty} e^{-(2n+3)t} dt.$$

II-2.3. Pour tout réel x et tout  $k \in \mathbb{N}$ , calculer

$$\int_0^{+\infty} e^{-(2k+1)t} \cos(xt) \, \mathrm{d}t.$$

II-2.4. Conclure que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ H(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^k (2k+1)}{(2k+1)^2 + x^2}.$$

# Partie III : étude d'une équation différentielle

On s'intéresse ici à l'ensemble

$$\mathscr{S} = \left\{ y \in \mathscr{C}^{2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \\ \forall t \in \mathbb{R}, \ y''(t) - y(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}(t)} \right\}.$$

- **III-1.** En utilisant ch et sh, déterminer toutes les fonctions  $y \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  telles que y'' = y.
- **III-2.1.** Donner la forme générale d'une solution  $y \in \mathcal{S}$ .
- **III-2.2.** Existe-t-il des solutions impaires dans  $\mathscr{S}$ ?
- **III-2.3.** Expliciter l'unique solution  $\theta \in \mathcal{S}$ , paire et telle que  $\theta(0) = 1$ .
- III-3.1. Déterminer explicitement l'unique suite réelle  $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$  telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \operatorname{ch}(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k t^{2k}.$$

**III-3.2.** Montrer l'existence et l'unicité d'une unique suite réelle (que l'on ne cherchera pas à déterminer explicitement, mais que l'on définira par récurrence)  $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$  telle que

$$b_0 a_0 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sum_{k=0}^n b_k a_{n-k} = 0.$$

**III-3.3.** Préciser  $b_0, b_1, b_2$ .

III-3.4. Démontrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, |b_n| \leqslant 1.$$

On pourra considérer comme connu que  $ch(1) \leq 2$ .

III-3.5. En déduire que pour tout  $t\in ]-1,1[$ , la série  $g(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}b_n\,t^{2n} \text{ converge absolument, avec de plus,}$   $\operatorname{ch}(t)\,g(t)=1.$ 

Remarque : on a ainsi prouvé que  $t\mapsto \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}$  est développable en série entière sur ]-1,1[.

III-4. On suppose qu'il existe une suite réelle  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  avec  $u_0=1$  et telle que la série entière définie par

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n t^{2n}$$

ait un rayon de convergence  $R \ge 1$ , et vérifie :

$$\forall t \in ]-1,1[, f''(t) - f(t) = \frac{1}{\operatorname{ch}(t)}.$$

- **III-4.1.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , déterminer une relation entre  $u_{n+1}$ ,  $u_n$  et  $b_n$ .
- **III-4.2.** En déduire qu'une telle suite  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  est unique et montrer par récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq 1.$$

- **III-4.3.** En déduire que la fonction  $\theta$  considérée en **III-2.3** est développable en série entière sur l'intervalle ]-1,1[.
- III-4.4. Justifier que  $x \mapsto \ln(\operatorname{ch}(x))$  est développable en série entière sur l'intervalle ]-1,1[.

Fin de l'énoncé.