

Huitième devoir à la maison

[CCP05]

*Les calculatrices sont interdites.
Les questions étoilées sont réservées
aux 5/2 et aux 3/2 aventureux.*

PARTIE I

On considère l'équation différentielle linéaire du 2^e ordre en la fonction inconnue y de la variable réelle x :

$$(\mathcal{E}_\lambda) \quad x(x+1)y''(x) + (2x+1)y'(x) - \lambda(\lambda+1)y(x) = 0,$$

où λ désigne un paramètre réel.

I.1. Étant donné $\lambda \in \mathbb{R}$, comparer les équations $(\mathcal{E}_\lambda)$ et $(\mathcal{E}_{-\lambda-1})$.

On supposera dans la suite du problème que $\lambda \geq -\frac{1}{2}$.

Dans la suite de cette partie, y désigne une fonction de la variable réelle x , admettant un développement en série entière

$$y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

au voisinage de 0.

I.2. Montrer que, pour que y soit solution de l'équation $(\mathcal{E}_\lambda)$, il faut et il suffit que l'on ait pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$a_{n+1} = \frac{(\lambda + n + 1)(\lambda - n)}{(n + 1)^2} a_n.$$

I.3.

I.3.1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $\lambda \in [-\frac{1}{2}, +\infty[$ pour que l'équation $(\mathcal{E}_\lambda)$ admette des solutions polynomiales de degré donné $d \in \mathbb{N}$.

I.3.2. Lorsque c'est le cas, montrer qu'il existe une unique solution polynomiale de $(\mathcal{E}_\lambda)$ de degré d , que nous noterons φ_d , telle que $\varphi_d(0) = 1$.

I.3.3. Expliciter la fonction polynôme φ_1 .

I.3.4. Déterminer les coefficients a, b, c, a', b', c' tels que :

$$\frac{8x^2 + 8x + 1}{x(x+1)(2x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{2x+1},$$

$$\frac{1}{x(x+1)(2x+1)^2} = \frac{a'}{x} + \frac{b'}{x+1} + \frac{c'}{(2x+1)^2}.$$

En déduire la solution générale de l'équation $(\mathcal{E}_1)$ sur $]0, +\infty[$.

I.4. On se place dans le cas où $\lambda \geq -\frac{1}{2}$, $\lambda \notin \mathbb{N}$.

I.4.1. On suppose que y est une solution non identiquement nulle de $(\mathcal{E}_\lambda)$. Déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

I.4.2. Montrer qu'il existe une unique solution de $(\mathcal{E}_\lambda)$, que nous noterons φ_λ , développable en série entière de la variable x sur $] -1, +1[$ et telle que $\varphi_\lambda(0) = 1$.

I.4.3. Expliciter les développements en série entière de la variable x des fonctions $\varphi_{-\frac{1}{2}}$ et $\varphi_{\frac{1}{2}}$.

PARTIE II

Soit ψ la fonction de la variable réelle x définie par :

$$\psi(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + x \sin^2 t} dt.$$

II.1.* Montrer que ψ est définie et continue sur $[-1, +\infty[$.

II.2.* Montrer que ψ est indéfiniment dérivable sur $] -1, +\infty[$.

II.3.

II.3.1. Montrer que pour tout $u \in] -1, +1[$ on a

$$\sqrt{1+u} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} u^n.$$

II.3.2. Montrer que ψ est développable en série entière de la variable x sur $] -1, +1[$ et que l'on a :

$$\forall x \in] -1, +1[,$$

$$\psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t dt \right) x^n.$$

II.3.3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n} t dt.$$

Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a

$$I_n = \frac{2n-1}{2n} I_{n-1}.$$

Calculer I_0 . En déduire I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, ainsi que le développement de ψ en série entière de la variable x sur $] -1, +1[$.

II.3.4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \leq 1.$$

II.3.5. Montrer que le développement de ψ en série entière est intégrable terme à terme sur $] -1, +1[$, et en déduire que :

$$\int_{-1}^{+1} \psi(x) dx = -2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(4p-1)(2p+1)} \left(\frac{(4p)!}{2^{4p}((2p)!)^2} \right)^2.$$

II.4. Déduire du développement de ψ en série entière une expression de $\psi(x)$ en fonction de $\varphi_{\frac{1}{2}}(x)$ et $\varphi_{-\frac{1}{2}}(x)$ pour tout $x \in] -1, +1[$.

PARTIE III

Soit f la fonction de la variable réelle t définie par :

$$f(t) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \sqrt{1 + x \sin^2 t} dx.$$

III.1.* Montrer que f est définie et continue sur $\mathbb{R}$, et 2π -périodique.

III.2.* Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

FIN DE L'ÉNONCÉ

