Corrigé du huitième devoir à la maison

I.1. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $(-\lambda-1)(-\lambda-1+1) = \lambda(\lambda+1)$,

donc les équations $(\mathscr{E}_{-\lambda-1})$ et $(\mathscr{E}_\lambda)$ sont les mêmes.

I.2. On a $y(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n$. En reportant dans $(\mathscr{E}_\lambda)$,

$$\begin{aligned}
&x^2\, y''(x) + x\, y''(x) + 2\,x\, y'(x) + y'(x) \\
&\quad - \lambda\,(\lambda+1)\, y(x) = 0 \\
\iff{} & x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\, a_n\, x^{n-2} \\
&\quad + x \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)\, n\, a_{n+1}\, x^{n-1} \\
&\quad + 2\,x \sum_{n=1}^{+\infty} n\, a_n\, x^{n-1} + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, x^n \\
&\quad - \lambda\,(\lambda+1) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = 0 \\
\iff{} & \sum_{n=0}^{+\infty} n\,(n-1)\, a_n\, x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, n\, a_{n+1}\, x^n \\
&\quad + \sum_{n=0}^{+\infty} 2\, n\, a_n\, x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)\, a_{n+1}\, x^n \\
&\quad - \lambda\,(\lambda+1) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = 0 \\
\iff{} & \sum_{n=0}^{+\infty} \Big((n+1)^2\, a_{n+1} \\
&\quad + \big(n\,(n+1) - \lambda\,(\lambda+1)\big)\, a_n \Big)\, x^n = 0.
\end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière de la fonction nulle, cette somme est nulle si et seulement si tous ses coefficients sont nuls, c'est-à-dire si et seulement si

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \frac{(\lambda+n+1)\,(\lambda-n)}{(n+1)^2}\, a_n.$$

I.3.1. Soit $d \in \mathbb{N}$. Si $(\mathscr{E}_\lambda)$ admet une solution polynomiale de degré d, elle admet une solution développable en série entière dont les termes sont nuls à partir du rang d : pour $n \geqslant d$, $a_{n+1} = 0$. En particulier

$$a_{d+1} = \frac{(\lambda+d+1)\,(\lambda-d)}{(d+1)^2}\, a_d = 0$$

donc $d = \lambda$ car $a_d \neq 0$ et $-\lambda - 1 \leqslant -\frac{1}{2}$. Il est donc nécessaire que λ soit un entier naturel.

Réciproquement, si $\lambda \in \mathbb{N}$, la relation de la question I.2 avec a_0 réel définit une unique suite telle que $a_\lambda \neq 0$, $a_{\lambda+1} = 0$ et donc pour $n \geqslant \lambda+1$, $a_n = 0$. Il s'ensuit que le polynôme $\sum_{n=0}^{\lambda} a_n\, x^n$ est solution de $(\mathscr{E}_\lambda)$.

Finalement, $(\mathscr{E}_\lambda)$ admet une solution de degré $d \in \mathbb{N}$ si et seulement si $\lambda = d$.

I.3.2. Soit $\lambda = d$. D'après ce qui précède,

il existe une unique solution polynomiale de degré d telle que $a_0 = 1$.

Commentaire. Attention, le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas ici, car on est sur un intervalle, $\mathbb{R}$, contenant 0, qui est une singularité de $(\mathscr{E}_\lambda)$.

I.3.3. Si $\lambda = 1$, $a_0 = 1$ et $a_1 = 2$.

$\varphi_1 : x \mapsto 2\,x + 1$ est solution sur $\mathbb{R}$ de $(\mathscr{E}_1)$.

I.4. Dans la première égalité, on trouve $a = 1$ en multipliant à gauche et à droite par x, puis en substituant 0 à x. De même, $b = 1$ en multipliant par $x+1$ et en faisant $x = -1$; $c = 4$ en multipliant par $2\,x+1$ et en faisant $x = -\frac{1}{2}$. Ainsi,

$$\frac{8\,x^2 + 8\,x + 1}{x\,(x+1)\,(2\,x+1)} = \frac{1}{x} + \frac{1}{x+1} + \frac{4}{2\,x+1}.$$

De même,

$$\frac{1}{x\,(x+1)\,(2\,x+1)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(2\,x+1)^2}.$$

Résolvons $(\mathscr{E}_1)$ par la méthode de variation de la constante. Cherchons les solutions de $(\mathscr{E}_1)$ sous la forme $y = \lambda\,\varphi_1$ où λ est une fonction deux fois dérivable. Pour alléger les écritures, posons $A : x \mapsto x(x+1)$, $B = A' : x \mapsto 2x+1$ et $C : x \mapsto -2$. Sur $]0, +\infty[$, comme φ_1 est solution de $(\mathscr{E}_1)$ et que $A > 0$ et $\varphi_1 > 0$,

$$\begin{aligned}
& A\,y'' + B\,y' + C\,y = 0 \\
\iff{} & A\,(\lambda''\,\varphi_1 + 2\,\lambda'\,\varphi_1' + \lambda\,\varphi_1'') \\
&\quad + B\,(\lambda'\,\varphi_1 + \lambda\,\varphi_1') + C\,\lambda\,\varphi_1 = 0 \\
\iff{} & A\,\varphi_1\,\lambda'' + (2\,A\,\varphi_1' + B\,\varphi_1)\,\lambda' \\
&\quad + \underbrace{(A\,\varphi_1'' + B\,\varphi_1' + C\,\varphi_1)}_{0}\,\lambda = 0 \\
\iff{} & \lambda' = \alpha \exp\!\left(-\int \frac{2\,A\,\varphi_1' + B\,\varphi_1}{A\,\varphi_1}\right) \\
&\quad = \alpha \exp\!\left(-2\int \frac{\varphi_1'}{\varphi_1} - \int \frac{A'}{A}\right) \\
&\quad = \alpha \exp(-2 \ln \varphi_1 - \ln A) \\
&\quad = \frac{\alpha}{A\,\varphi_1^2},\ \alpha \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

D'après la question précédente, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{A(x)\,\varphi_1^2(x)} &= \frac{1}{x\,(x+1)\,(2\,x+1)^2} \\
&= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{4}{(2\,x+1)^2},
\end{aligned}$$

donc il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall x > 0,\ \lambda(x) = \alpha\left(\ln \frac{x}{x+1} + \frac{2}{2\,x+1}\right) + \beta.$$

L'ensemble des solutions de $(\mathscr{E}_1)$ sur $]0,+\infty[$ est
$$\Big\{x \mapsto \alpha\Big((2x+1)\ln\frac{x}{x+1}+2\Big) + \beta(2x+1),\ (\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^2\Big\}.$$

I.4.1. D'après la question I.2, comme y n'est pas polynomiale, pour $n\in\mathbb{N}$, $a_n \neq 0$ et
$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|(\lambda+n+1)(\lambda-n)|}{(n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1,$$
donc $\sum a_n x^n$ a pour rayon de convergence 1.

I.4.2. Ainsi, toutes les suites vérifiant la récurrence de I.2 conduisent à une solution de $(\mathscr{E}_\lambda)$ développable en série entière sur $]-1,1[$. La seule qui vaille 1 en 0 correspond à $a_0 = 1$.

$(\mathscr{E}_\lambda)$ admet une unique solution φ_λ sur $]-1,1[$ développable en série entière et telle que $\varphi_\lambda(0)=1$.

I.4.3. Pour $\lambda = -\frac12$, $a_{n+1} = -\dfrac{(n+\frac12)^2}{(n+1)^2}a_n$ donc
$$\begin{aligned}
a_n &= -\left(\frac{2n-1}{2n}\right)^2 a_{n-1}\\
&= (-1)^2\left(\frac{(2n-1)(2n-3)}{(2n)(2n-2)}\right)^2 a_{n-2}\\
&= (-1)^n\left(\frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{(2n)(2n-2)\cdots 4\cdot 2}\right)^2 a_0\\
&= (-1)^n\left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\right)^2,
\end{aligned}$$
ce que prouve une récurrence immédiate.

Notation. *Dorénavant, notons*
$$b_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Ainsi,
$$\forall x\in\,]-1,1[,\ \varphi_{-1/2}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n b_n^2 x^n.$$

Pour $\lambda = \frac12$, $a_{n+1} = -\dfrac{(n+\frac32)(n-\frac12)}{(n+1)^2}a_n$ donc
$$\begin{aligned}
a_n &= -\frac{(2n+1)}{(2n)}\frac{(2n-3)}{(2n)}a_{n-1}\\
&= (-1)^n\frac{(2n+1)(2n-1)\cdots 5\cdot 3}{(2n)(2n-2)\cdots 4\cdot 2}\\
&\quad\times\frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 1\cdot(-1)}{(2n)(2n-2)\cdots 4\cdot 2}a_0\\
&= (-1)^{n+1}(2n+1)\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}\\
&\quad\times\frac{(2n-1)}{(2n-1)}\frac{(2n-3)(2n-5)\cdots 1}{(2n)(2n-2)\cdots 4\cdot 2}\\
&= (-1)^{n+1}\frac{(2n+1)}{(2n-1)}b_n^2,
\end{aligned}$$
ce que prouve une récurrence immédiate. Ainsi,

$\forall x\in\,]-1,1[,$
$$\varphi_{1/2}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{(2n+1)}{(2n-1)}b_n^2 x^n.$$

Notation. *Dans la suite, posons $I = [0,\frac{\pi}{2}]$.*

II.1.* *Commentaire.* Conformément au programme, on n'insistera pas sur la continuité (par morceaux) des fonctions dépendant de la variable t d'intégration.

Posons $A = [-1,+\infty[$ et considérons
$$g : A\times I\to\mathbb{R},\ (x,t)\mapsto\sqrt{1+x\sin^2 t}.$$

Pour tout $t\in I$, $x\mapsto g(x,t)$ est continue sur A. Soit $a>-1$. Pour $(x,t)\in[-1,a]\times I$,
$$|g(x,t)| \leqslant \sqrt{1+\max(1,a)} = M_a,$$
où la fonction $t\mapsto M_a$ est intégrable sur I.

Alors pour tout $x\in[-1,a]$, $t\mapsto g(x,t)$ est intégrable sur I et ψ est définie et continue sur $[-1,a]$. Comme c'est vrai pour tout $a>-1$,

ψ est définie et continue sur $[-1,+\infty[$.

II.2.* Pour tout $t\in I$, $x\mapsto g(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $A' =]-1,+\infty[$. On exclut -1 car $x\mapsto g(x,\frac{\pi}{2}) = \sqrt{1+x}$ n'est pas dérivable en -1. Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$ et $(x,t)\in A'\times I$,
$$\frac{\partial^p g}{\partial x^p}(x,t) = \prod_{k=0}^{p-1}(\tfrac12-k)\sin^{2p}t\,(1+x\sin^2 t)^{\frac12-p}.$$

Soit $a\in A'$. Pour tout $p\in\mathbb{N}^*$ et $(x,t)\in[a,+\infty[\times I$,
$$\left|\frac{\partial^p g}{\partial x^p}(x,t)\right| \leqslant \left|\prod_{k=0}^{p-1}(\tfrac12-k)\right|(1+a)^{\frac12-p} = N_a,$$
où $t\mapsto N_a$ est intégrable sur I.

Alors, comme dans la question précédente, les conclusions sont valides pour tout $a>-1$, donc sur A' tout entier : pour tout $(p,x)\in\mathbb{N}\times A'$, $t\mapsto\frac{\partial^p g}{\partial x^p}(x,t)$ est intégrable sur I,

ψ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur A', et pour tout $(p,x)\in\mathbb{N}\times A'$,
$$\psi^{(p)}(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\frac{\partial^p g}{\partial x^p}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Commentaire. Dans le programme ne figure pas de théorème de la classe $\mathscr{C}^\infty$ pour les intégrales à paramètre. Mais en dominant toutes les dérivées partielles, on voit qu'on peut appliquer directement le théorème de la classe $\mathscr{C}^k$ pour tout $k\in\mathbb{N}^*$.

II.3.1. Soit $u \in \,]-1,1[$. D'après le cours,

$$\sqrt{1+u} = (1+u)^{1/2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{1/2}{n} x^n.$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}\binom{1/2}{n} &= \frac{1}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2}-k\right) = \frac{(-1)^{n-1}}{2n!}\prod_{k=1}^{n-1}\left(k-\frac{1}{2}\right)\\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2n!2^{n-1}}\prod_{k=1}^{n-1}(2k-1)\\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!(2n-1)}\prod_{k=1}^{n}(2k-1)\\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!(2n-1)}\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k-1)\cdot\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)}\\ &= \frac{(-1)^{n-1}}{2^n n!(2n-1)}\frac{(2n)!}{2^n n!} = \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}b_n.\end{aligned}$$

Par ailleurs, $\binom{1/2}{0} = 1 = b_0$. Ainsi,

$$\boxed{\forall u \in \,]-1,1[,\ \sqrt{1+u} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}b_n u^n.}$$

II.3.2. Soit $x \in \,]-1,1[$. D'après ce qui précède, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$,

$$\sqrt{1+x\sin^2 t} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}b_n (x\sin^2 t)^n$$

Soit $N \in \mathbb{N}$. On peut écrire

$$\begin{aligned}\psi(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}b_n(x\sin^2 t)^n\right)\mathrm{d}t\\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}b_n x^n\sin^{2n} t\right)\mathrm{d}t\\ &\quad+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}b_n x^n\sin^{2n} t\right)\mathrm{d}t\\ &= \sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}b_n x^n\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n} t\,\mathrm{d}t\right)\\ &\quad+\underbrace{\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}b_n x^n\sin^{2n} t\right)\mathrm{d}t}_{R_N}.\end{aligned}$$

D'une part, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}b_n x^n\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n} t\,\mathrm{d}t\right)\right|\\ &\leqslant \frac{1}{2n-1}b_n|x|^n\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}|\sin^{2n} t|\,\mathrm{d}t\\ &\leqslant \frac{1}{2n-1}b_n|x|^n.\end{aligned}$$

Comme $|x| < 1$, d'après la question précédente, la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}b_n x^n$$

converge absolument, donc il en est de même de la série entière

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}b_n x^n\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n} t\,\mathrm{d}t\right)$$

et

$$\begin{aligned}&\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}b_n x^n\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n} t\,\mathrm{d}t\right)\\ &=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}b_n x^n\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n} t\,\mathrm{d}t\right)\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}|R_N| &\leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sum_{n=N+1}^{+\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}b_n x^n\sin^{2n} t\right|\mathrm{d}t\\ &\leqslant \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}b_n|x|^n\right)\mathrm{d}t\\ &= \sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}b_n|x|^n.\end{aligned}$$

Comme $|x| < 1$, en invoquant la même série entière que plus haut,

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=N+1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}b_n|x|^n = 0.$$

Alors, en passant à la limite sur N dans l'expression de $\psi(x)$,

$$\boxed{\psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}b_n\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^{2n} t\,\mathrm{d}t\right)x^n.}$$

Commentaire. Nous verrons plus tard un théorème qui permettra d'être bien plus efficace.

II.3.3. On reconnait les intégrales de Wallis :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ I_n = b_n\,\tfrac{\pi}{2}.}$$

Commentaire. Ce résultat n'est pas à connaitre et il va de soi qu'il faut le démontrer. Mais je renvoie au calcul effectué dans le cours.

Alors,

$$\boxed{\forall x \in \,]-1,1[,\ \psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}b_n^2 x^n.}$$

II.3.4. Pour $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{b_n \leqslant 1}$, car

$$\begin{aligned}(2n)! = \prod_{k=1}^{2n}k &= \prod_{p=1}^{n}(2p)\cdot\prod_{p=1}^{n}(2p-1)\\ &\leqslant \prod_{p=1}^{n}(2p)\cdot\prod_{p=1}^{n}(2p) = 2^{2n}(n!)^2.\end{aligned}$$

II.3.5. La démarche est analogue à celle de la question II.3.2. Nous détaillerons moins. Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\int_{-1}^{1} \psi(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\,b_n^2 \int_{-1}^{1} x^n\,\mathrm{d}x + \underbrace{\int_{-1}^{1}\left(\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\,b_n^2\,x^n\right)\mathrm{d}x}_{Q_N}.$$

Avec la formule de Stirling, quand n augmente,

$$b_n = \frac{(2n)!}{2^{2n}\,(n!)^2} \sim \frac{\sqrt{2\pi\,2n}\,(2n)^{2n}\,e^{-2n}}{2^{2n}\,2\pi\,n\,n^{2n}\,e^{-2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi\,n}}.$$

Donc, pour $|x| \leqslant 1$,

$$\left|\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\,b_n^2\,x^n\right| = \frac{1}{2n-1}\,b_n^2\,|x|^n \leqslant \frac{1}{2n-1}\,b_n^2 \sim \frac{1}{2\pi\,n^2}.$$

Alors

$$|Q_N| \leqslant \int_{-1}^{1} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\,b_n^2\,x^n\right|\mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^{1} \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1}\,b_n^2\,\mathrm{d}x = 2\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{2n-1}\,b_n^2 \xrightarrow[N\to+\infty]{} 0.$$

Par ailleurs, si n est impair, $\int_{-1}^{1} x^n\,\mathrm{d}x = 0$; et si $n = 2p$ où $p \geqslant 0$,

$$\int_{-1}^{1} x^{2p}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{2p+1}.$$

Finalement,

$$\boxed{\int_{-1}^{1} \psi(x)\,\mathrm{d}x = -2\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{b_{2p}^2}{(2p+1)\,(4p-1)}.}$$

Commentaire. Là aussi, nous verrons plus tard un théorème plus efficace.

II.4. Pour tout $|x| < 1$, posons

$$\varphi_{-1/2}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n\,x^n,\ \ \varphi_{1/2}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n\,x^n \quad \text{et } \psi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n\,x^n.$$

Par unicité du développement en série entière d'une fonction, pour avoir un lien entre ces fonctions, il suffit de trouver un lien entre leurs coefficients. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{1}{2n-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2n+1}{2n-1} - 1\right)$$

donc en multipliant par $(-1)^{n-1}\,b_n^2$ et sachant que $(-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}$, $w_n = \frac{1}{2}\,(v_n + u_n)$,

$\boxed{\text{d'où } \psi = \tfrac{1}{2}\,(\varphi_{1/2} + \varphi_{-1/2}).}$

III.1.* *Commentaire.* L'énoncé propose une intégrale à paramètre dans laquelle les rôles de x et t sont inversés. Nous omettrons encore la vérification des hypothèses concernant les fonctions de la variable d'intégration, ici x.

Posons $B = \mathbb{R}$, $J = [-1, 1]$ et

$$h : J \times B \to \mathbb{R},\ (x,t) \mapsto \sqrt{1 + x\sin^2 t}.$$

Pour tout $x \in J$, $t \mapsto h(x,t)$ est continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $(x,t) \in J \times B$, $|h(x,t)| \leqslant \sqrt{2}$ où $x \mapsto \sqrt{2}$ est intégrable sur J.

Alors, pour tout $t \in B$, $x \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur J, et

la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$. Elle est de plus clairement π-périodique et paire.

III.2.* Pour tout $x \in J$, $t \mapsto h(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\frac{\partial h}{\partial t}(x,t) = \frac{x\sin t\cos t}{\sqrt{1 + x\sin^2 t}}.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto h(x,t)$ est intégrable sur J, d'après ce qui précède. Pour tout $(x,t) \in J \times \mathbb{R}$, $x \geqslant -1$ donc

$$\sqrt{1 + x\sin^2 t} \geqslant \sqrt{1 - \sin^2 t} = |\cos t|.$$

Si $t \neq \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, $\cos t \neq 0$ donc

$$\left|\frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\right| \leqslant \frac{|x\sin t\cos t|}{|\cos t|} = |x\sin t| \leqslant 1.$$

Et si $t = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$, $\cos t = 0$ donc $|\frac{\partial h}{\partial t}(x,t)| = 0 \leqslant 1$. Dans tous les cas, $|\frac{\partial h}{\partial t}(x,t)| \leqslant 1$, donc l'hypothèse de domination est vérifiée car $x \mapsto 1$ est bien-sûr intégrable sur J.

Alors pour $t \in B$, $x \mapsto \frac{\partial h}{\partial t}(x,t)$ est intégrable sur J,

f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in B$,

$$f'(t) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} \frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}x.$$