Neuvième devoir à la maison

[MP05]
Durée : 3 heures
Calculatrices interdites

Avertissement : dans ce problème, apparaissent de nombreuses intégrales impropres. On prendra soin de justifier systématiquement l'intégrabilité des fonctions considérées même lorque ce n'est pas explicitement demandé.

I. Préliminaires

1. Montrer les inégalités suivantes :

(1) $\forall t \in \,]-1,+\infty[\,,\ \ln(1+t) \leqslant t$

(2) $\forall t \in \,]0,+\infty[\,,\ t\ln(t) \geqslant -\dfrac{1}{e}$

2. Soit ψ une bijection de l'intervalle ouvert I sur l'intervalle ouvert J. Si ψ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, donner une condition nécessaire et suffisante pour que ψ^{-1} soit aussi de classe $\mathscr{C}^1$ sur J. On dit alors que ψ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de I sur J. Dans ce cas, rappeler l'expression de la dérivée de ψ^{-1}.

II. Construction d'une application particulière

On note H l'ensemble des fonctions f strictement positives, continues sur $\mathbb{R}$, pour lesquelles il existe $\rho > 0$ (dépendant de f) tel que, pour tout réel x :

(A) $0 < f(x) \leqslant \dfrac{1}{\rho}\exp\left(\left(\dfrac{1}{2}-\rho\right)x^2\right)$

On note H_0, le sous-ensemble de H des fonctions f telles que :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\,e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{2\pi}.$$

Dans tout le reste de l'énoncé, f est un élément de H_0.

3. Soit F_f définie par

$$F_f(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

En particulier,

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

Montrer que F_f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $]0,\sqrt{2\pi}[$.

4. Montrer qu'il existe une unique fonction φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x, on ait

$$\int_{-\infty}^{\varphi(x)} f(u)\,e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

5. Montrer que φ est monotone et que φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

6. Pour tout réel x, calculer

$$\ln(\varphi'(x)) + \ln(f(\varphi(x))) - \frac{1}{2}\varphi(x)^2,$$

$$\text{et } \ln((\varphi^{-1})'(x)) - \ln(f(x)) - \frac{1}{2}\varphi^{-1}(x)^2.$$

7. Soit h une fonction continue par morceaux de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que la fonction $u \mapsto h(u)\,f(u)\,e^{-u^2/2}$ soit intégrable sur $\mathbb{R}$.

Montrer l'identité suivante :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\,f(u)\,e^{-u^2/2}\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\varphi(u))\,e^{-u^2/2}\mathrm{d}u.$$

8. Montrer qu'il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout réel $x \geqslant A$, on ait :

$$\int_{x}^{x+1} \varphi^2(u)\,e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u \geqslant \varphi^2(x)\,e^{-(x+1)^2/2}.$$

9. Montrer qu'il existe un réel $B > 0$ tel que pour tout réel $|u| \geqslant B$, on ait :

$$|\varphi(u)| \leqslant e^{(|u|+1)^2/4}.$$

10. Déterminer une primitive de la fonction

$$u \mapsto (u\,\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1)\,e^{-u^2/2}.$$

11. Calculer l'intégrale suivante :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(u\,\varphi(u) - u^2 - \varphi'(u) + 1\big)\,e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

III. Une inégalité intéressante

On introduit les notations suivantes :

$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\ln(f(u))\,e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u,$$

$$\Phi(f) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} |u-\varphi(u)|^2\, e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

12. Justifier la convergence de ces deux intégrales.

13. Montrer l'identité :

$$E(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(f(\varphi(u)))\,e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u.$$

14. Montrer l'égalité suivante :

$$E(f) - \Phi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \big(\varphi'(u) - 1 - \ln(\varphi'(u))\big)\,e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u. \qquad (3)$$

15. Quelle est la relation d'ordre entre $\Phi(f)$ et $E(f)$?

16. Déterminer les fonctions telles que $E(f) = \Phi(f)$.

Fin du problème

Le problème du transport de Monge consiste à optimiser le coût global du transport d'une répartition de masse vers une autre. Dans le cas uni-dimensionnel que nous venons de traiter, on se donne un tas de sable infiniment fin dont le poids entre les abscisses $u - \mathrm{d}u$ et $u + \mathrm{d}u$ est donné par $2\exp(-u^2/2)\,\mathrm{d}u$. On veut le déplacer vers un tas de sable de densité linéique $f(u)\,exp(-u^2/2)$. Cela est représenté par une application s de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui pour tout réel u donne l'abscisse, $s(u)$, du grain situé en u après le transport. On montre que l'application φ déterminée en question 4 minimise le coût du transport défini par $\int_{-\infty}^{+\infty} |u-s(u)|^2\, e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$, parmi toutes les fonctions s possibles. L'objectif de ce problème est de majorer ce coût minimal par une quantité qui ne dépend que de f et qui ne nécessite pas le calcul de φ. Le nombre $E(f)$ est appelé l'entropie de Boltzmann.