Corrigé du neuvième devoir à la maison

1. La fonction $\alpha : t \mapsto \ln(1+t) - t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$. De plus, pour tout $t > -1$,

$$\alpha'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = -\frac{t}{1+t},$$

donc $\alpha'(t) > 0$ sur $]-1,0[$ et $\alpha'(t) < 0$ sur $]0,+\infty[$, donc α croît strictement sur $]-1,0[$ puis décroit strictement sur $]0,+\infty[$. Comme $\alpha(0) = 0$, α est constamment négative, c'est-à-dire

$\forall t \in\,]-1,+\infty[,\ \ln(1+t) \leqslant t.$

De même, la fonction $\beta : t \mapsto t\ln(t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$; pour tout $t > 0$, $\beta'(t) = \ln(t) + 1$; pour tout $t \in\,]0,\frac{1}{e}[$, $\beta'(t) < 0$ donc β décroit strictement sur $]0,\frac{1}{e}]$; pour tout $t \in\,]\frac{1}{e},+\infty[$, $\beta'(t) > 0$ donc β croît strictement sur $]\frac{1}{e},+\infty[$; comme $\beta(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e}$,

$\forall t \in\,]0,+\infty[,\ t\ln(t) \geqslant -\frac{1}{e}.$

2. D'après le cours, une telle condition est que

ψ' ne s'annule pas sur I.

Dans ce cas, $(\psi^{-1})' = \dfrac{1}{\psi' \circ \psi^{-1}}$.

II. Pour alléger les écritures, posons $\delta = \frac{1}{2}$. Dans tout le problème, adoptons des notations fonctionnelles. En particulier, considérons les fonctions

$$j : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ u \mapsto u, \quad j^2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ u \mapsto u^2,$$
$$m = \exp\circ(-\delta j^2) : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ u \mapsto e^{-u^2/2},$$

et confondons abusivement $c \in \mathbb{R}$ et la fonction $u \mapsto c$.

La fonction m est positive et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Sa parité permet de n'étudier son intégrabilité que sur $\mathbb{R}_+$. Comme $m(u) \ll_{+\infty} e^{-u}$ et que $u \mapsto e^{-u}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$, la fonction m est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Pour alléger, notons $\int_{\mathbb{R}} m = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2/2}\,\mathrm{d}u$.

Soit $f \in H$. Il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $0 < f(u)m(u) \leqslant e^{-\rho u^2}/\rho$. La fonction $u \mapsto e^{-\rho u^2}$ est continue, positive et, par une démarche analogue à ci-dessus, intégrable sur $\mathbb{R}$, donc fm aussi. Il est donc licite de parler de H_0.

3. On vient de montrer que fm est intégrable sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur $]-\infty,x]$ pour tout x réel. Ainsi, F_f est bien définie.

En outre, pour $x \in \mathbb{R}$, $F_f(x) = \int_{-\infty}^0 fm + \int_0^x fm$ donc F_f est une primitive de fm. Alors elle est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $(F_f)' = fm > 0$. Elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image : d'après la question 2, c'est même est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme.

Comme fm est intégrable sur $\mathbb{R}$ et que $f \in H_0$,

$$\lim_{-\infty} F_f = \int_{-\infty}^0 fm + \int_0^{-\infty} fm = 0$$
$$\text{et } \lim_{+\infty} F_f = \int_{\mathbb{R}} fm = \sqrt{2\pi}.$$

Finalement, F_f est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}$ sur $]0,\sqrt{2\pi}[$.

4. Soit $M : x \mapsto \int_{-\infty}^x m$ la primitive de m nulle en $-\infty$. On cherche φ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_{-\infty}^{\varphi(x)} fm = \int_{-\infty}^x m$, c'est-à-dire $F_f \circ \varphi = M$. Comme F_f est bijective,

$\varphi = (F_f)^{-1} \circ M$ est l'unique fonction qui convient.

5. M croît strictement sur $\mathbb{R}$, F_f aussi, donc $(F_f)^{-1}$ aussi. Alors, comme composée de fonctions strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, φ croît strictement sur $\mathbb{R}$.

φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ car M et $(F_f)^{-1}$ le sont. En passant, φ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur son image.

Enfin, par composition, $\varphi(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ car $M(\mathbb{R}) =]0,\sqrt{2\pi}[$ et $(F_f)^{-1}(]0,\sqrt{2\pi}[) = \mathbb{R}$.

Ainsi, φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme strictement croissant de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

6. En dérivant $F_f \circ \varphi = M$, on a $\varphi' \cdot (F_f)' \circ \varphi = M'$. Or $M' = m$ et $(F_f)' = fm$ donc $\varphi' \cdot (f \cdot m) \circ \varphi = m$, c'est-à-dire $\varphi' \cdot f \circ \varphi \cdot m \circ \varphi = m$. Toutes ces fonctions sont strictement positives, donc en composant à gauche par ln, on a

$(*)$ $\quad \ln\circ\varphi' + \ln\circ f\circ\varphi - \delta\varphi^2 = -\delta j^2.$

En composant à droite par φ^{-1}, on a

$$\ln\circ\varphi'\circ\varphi^{-1} + \ln\circ f - \delta j^2 = -\delta(\varphi^{-1})^2.$$

Or $\varphi'\circ\varphi^{-1} = 1/(\varphi^{-1})'$ donc $\ln\circ\varphi'\circ\varphi^{-1} = -\ln\circ(\varphi^{-1})'$. Alors, en multipliant tout par -1 et en échangeant les deux derniers termes,

$(**)$ $\quad \ln\circ(\varphi^{-1})' - \ln\circ f - \delta(\varphi^{-1})^2 = -\delta j^2.$

7. Puisque φ est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, d'après le théorème du changement de variable, comme hfm est intégrable sur $\mathbb{R}$, $h\circ\varphi\cdot f\circ\varphi\cdot m\circ\varphi\cdot|\varphi'|$ l'est aussi. Or en composant $(*)$ par exp à gauche, $\varphi'\cdot f\circ\varphi\cdot m\circ\varphi = m$.

$h\circ\varphi\cdot m$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\int_{\mathbb{R}} hfm = \int_{\mathbb{R}} h\circ\varphi\cdot m$.

8. D'après la question 5, $\lim_{+\infty}\varphi = +\infty$ donc il existe $A > 0$ tel que pour $u \geqslant A$, $\varphi(u) \geqslant 0$.

Soit $x \geqslant A$. Sur $[x,x+1]$, m décroit, φ est positive et croît, donc φ^2 croît aussi, car $t \mapsto t^2$ croît sur $\mathbb{R}_+$. Alors, pour tout $u \in [x,x+1]$, $\varphi^2(u) \geqslant \varphi^2(x)$ et $m(u) \geqslant m(x+1)$.

$\exists A > 0, \forall x \geqslant A,\ \int_x^{x+1} \varphi^2 m \geqslant \varphi^2(x)m(x+1).$

9. Appliquons la question 7 à la fonction j^2. Sur $\mathbb{R}$, $0 < j^2 fm \leqslant j^2 \exp\circ(-\rho j^2)/\rho$, donc $j^2 fm$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Alors, $\varphi^2 m$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Il s'ensuit que $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\varphi^2 m = 0$. Alors, il existe $B_1 \geqslant A$ tel que pour $x \geqslant B_1$, $\varphi^2(x)m(x+1) \leqslant \int_x^{x+1}\varphi^2 m \leqslant 1$, autrement dit,

$$|\varphi(x)| = \varphi(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{m(x+1)}} = e^{(x+1)^2/4} = e^{(|x|+1)^2/4}.$$

Regardons maintenant ce qui se passe quand x est très négatif et raisonnons comme dans la question 8.

On sait que $\lim_{-\infty}\varphi = -\infty$ donc il existe $A' < 0$ tel que pour $u \leqslant A'$, $\varphi(u) \leqslant 0$.

Soit x tel que $x+1 \leqslant A'$. Sur $[x,x+1]$, m croît, φ est négative et croît donc φ^2 décroit, car $t \mapsto t^2$ décroit sur $\mathbb{R}_-$. Alors, pour tout $u \in [x,x+1]$, $\varphi^2(u) \geqslant \varphi^2(x+1)$ et $m(u) \geqslant m(x)$. Alors $\int_x^{x+1} \varphi^2 m \geqslant \varphi^2(x+1)\,m(x)$. Comme $\varphi^2 m$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, $\lim_{x\to-\infty} \int_x^{x+1} \varphi^2 m = 0$. Alors, il existe $B_2 \leqslant A'-1 < 0$ tel que pour tout $x \leqslant B_2$, $\varphi^2(x+1)\,m(x) \leqslant \int_x^{x+1} \varphi^2 m \leqslant 1$, donc

$$|\varphi(x)| \leqslant \frac{1}{\sqrt{m(x-1)}} = e^{(x-1)^2/4} = e^{(|x|+1)^2/4}.$$

En posant $B = \max(B_1, -B_2)$, dès que $|u| \geqslant B$, si $u \geqslant 0$, $u \geqslant B_1$ et si $u \leqslant 0$, $u \leqslant B_2$ donc les deux majorations de $|\varphi(u)|$ sont valides.

$\exists B > 0, \forall |u| \geqslant B,\ |\varphi(u)| \leqslant e^{(|u|+1)^2/4}$.

10. La fonction $g = (j\varphi - j^2 - \varphi' + 1)m$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle y admet des primitives. En outre, $m' = -jm$ donc si k est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, $(km)' = (k' - jk)m$. Alors, comme $j' = 1$, on écrit

$$g = \big(j' - \varphi' - j\,(j-\varphi)\big)\,m = ((j-\varphi)\,m)'.$$

Une primitive de g est la fonction $G = (j-\varphi)\,m$.

11. Soit $a \in \mathbb{R}$. On a $\int_0^a g = G(a) - G(0)$. On sait que $\lim_{\pm\infty} j\,m = 0$. En outre, d'après la question 9, pour $u \geqslant B$,

$$\begin{aligned}|\varphi(u)|\,m(u) &\leqslant \exp(\delta^2\,(|u|+1)^2 - \delta\,u^2)\\ &= \exp(\delta^2\,(-u^2 + 2\,|u| + 1)),\end{aligned}$$

donc $\lim_{\pm\infty} \varphi\ m = 0$. Ainsi, $\lim_{\pm\infty} G = 0$, $\lim_{a\to+\infty} \int_0^a g = -G(0)$ et $\lim_{a\to-\infty} \int_a^0 g = G(0)$.

Ainsi, $I = \int_{\mathbb{R}} g$ converge et vaut 0.

Commentaire. On a prouvé la convergence de I, et non l'intégrabilité de g sur $\mathbb{R}$. Mais vue la tournure de l'énoncé, on s'en contente.

12. La fonction $f \cdot \ln\circ f \cdot m$ est définie et continue sur $\mathbb{R}$ car $f > 0$. Soit $u \in \mathbb{R}$. D'après les inégalités (2) et (A)

$$\begin{aligned}-\tfrac{1}{e} &\leqslant f(u)\ln\big(f(u)\big)\\ &\leqslant \tfrac{1}{\rho}\exp((\delta-\rho)\,u^2)((\delta-\rho)\,u^2 - \ln\rho).\end{aligned}$$

Pour des réels $a \leqslant b \leqslant c$, $|b| \leqslant \max(|a|,|c|) \leqslant |a|+|c|$, donc

$$\begin{aligned}&f(u)\,|\ln\big(f(u)\big)|\\ &\leqslant \tfrac{1}{e} + \tfrac{1}{\rho}\exp((\delta-\rho)\,u^2)(|\delta-\rho|\,u^2 + |\ln\rho|).\end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}&f(u)\,|\ln\big(f(u)\big)|\,e^{-u^2/2}\\ &\leqslant e^{-u^2/2-1} + \tfrac{1}{\rho}e^{-\rho u^2}(|\delta-\rho|\,u^2 + |\ln\rho|)\\ &= \underset{|u|\to+\infty}{\mathrm{O}}\Big(\frac{1}{u^2}\Big).\end{aligned}$$

$f \cdot \ln\circ f \cdot m$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $E(f)$ existe.

Prouvons que $(j-\varphi)^2\,m$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Elle y est continue. En outre, $0 \leqslant (j-\varphi)^2\,m \leqslant 2\,(j^2+\varphi^2)\,m$. Or, $j^2\,m$ est clairement intégrable sur $\mathbb{R}$, et d'après la question 9, $\varphi^2\,m$ aussi.

$(j-\varphi)^2\,m$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et $\Phi(f)$ existe.

13. Appliquons la question 7 à la fonction $h = \ln\circ f$:

$\ln\circ f\circ\varphi\cdot m$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et
$E(f) = \int_{\mathbb{R}} \ln\circ f \cdot f \cdot m = \int_{\mathbb{R}} \ln\circ f\circ\varphi\cdot m$.

14. Alors

$$E(f) - \Phi(f) = \int_{\mathbb{R}} (\ln\circ f\circ\varphi - \delta\,j^2 + j\,\varphi - \delta\,\varphi^2)m.$$

D'après $(*)$, $\ln\circ f\circ\varphi - \delta\,\varphi^2 = -\ln\circ\varphi' - \delta\,j^2$.

En retranchant $I = 0$ (voir la question 11), on a

$$\begin{aligned}E(f) - \Phi(f) - I = \int_{\mathbb{R}}(&-\ln\circ\varphi' - j^2 + j\,\varphi\\ &- j\,\varphi + j^2 + \varphi' - 1))m.\end{aligned}$$

Ainsi, $E(f) - \Phi(f) = \int_{\mathbb{R}} (\varphi' - 1 - \ln\circ\varphi')m$.

15. D'après l'inégalité (1) de la question 1, pour tout $t > 0$, $t-1 \geqslant \ln(t)$, donc $\varphi' - 1 - \ln\circ\varphi' \geqslant 0$. Alors $E(f) - \Phi(f) \geqslant 0$ et $\Phi(f) \leqslant E(f)$.

16. Soit f une fonction telle que $E(f) = \Phi(f)$. Comme $\varphi' - 1 - \ln\circ\varphi'$ est positive et continue sur $\mathbb{R}$ et que son intégrale est nulle, elle est nulle. Mais d'après l'étude menée à la question 1, le seul réel t tel que $t - 1 = \ln(t)$ est $t = 1$, donc $\varphi' = 1$, donc $\varphi = j + c$, où $c \in \mathbb{R}$. Du coup, $\varphi^{-1} = j - c$ et d'après $(**)$,

$$\begin{aligned}\ln\circ f &= \ln\circ(\varphi^{-1})' - \delta\,(\varphi^{-1})^2 + \delta\,j^2\\ &= \ln 1 - \delta\,(j-c)^2 + \delta\,j^2 = c\,j - \delta\,c^2\end{aligned}$$

et $f = \exp\circ(c\,j - \delta\,c^2)$.

Montrons qu'une telle fonction est bien dans H_0. Soit $\rho > 0$. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}&\rho\exp(cx - \delta\,c^2)\exp(-(\delta-\rho)\,x^2)\\ &= \rho\exp\Big(-(\delta-\rho)\Big(x - \frac{c}{1-2\,\rho}\Big)^2 + \frac{\rho\,c^2}{1-2\,\rho}\Big).\end{aligned}$$

On voudrait borner cette expression par 1. Il est déjà nécessaire de choisir $\rho < \delta$. Alors, elle est majorée par $\rho\exp\big(\rho c^2/(1-2\,\rho)\big)$. Ce majorant tend vers 0 quand ρ tend vers 0 : il peut donc être inférieur à 1, en choisissant ρ suffisamment petit. Dans ce cas, $f \in H$. Enfin, en posant $v = u - c$,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{cu-\delta c^2}\,e^{-\delta\,u^2}\,\mathrm{d}u &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\delta\,(u-c)^2}\,\mathrm{d}u\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\delta v^2}\,\mathrm{d}v\end{aligned}$$

et $f \in H_0$.

Réciproquement, soit $c \in \mathbb{R}$ et $f = \exp\circ(c\,j - \delta\,c^2)$ qui est dans H_0. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}F_f(x) &= \int_{-\infty}^{x} \exp\circ(-\delta\,(j-c)^2)\\ &= \int_{-\infty}^{x-c} \exp\circ(-\delta\,j^2) = M(x-c),\end{aligned}$$

donc $\varphi^{-1} = j - c$ et $\varphi = j + c$. Du coup, $E(f) = \Phi(f)$.

Finalement, $E(f) = \Phi(f)$ si et seulement si $f = \exp\circ(c\,j - \delta\,c^2)$ où $c \in \mathbb{R}$.