

# Corrigé du premier devoir de révision

REMARQUE. Ce n'est pas très clair dans l'énoncé, mais puisque les fonctions de  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$  sont positives, continues et ont une intégrale sur  $\mathbb{R}$  qui vaut 1, elles sont bien-sûr intégrables sur  $\mathbb{R}$ .

NOTATION. Pour raccourcir les écritures, nous dirons  $\int_{\mathbb{R}}$  au lieu de  $\int_{-\infty}^{+\infty}$ .

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . La fonction  $t \mapsto f(t)g(x-t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  car  $f$  et  $g$  le sont. De plus,  $g$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ , donc pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$|f(t)g(x-t)| = |g(x-t)|f(t) \leq \|g\|_{\infty} f(t).$$

Or  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ , donc  $t \mapsto f(t)g(x-t)$  l'est aussi et  $\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) dt$  converge.

Considérons la fonction

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, t) \mapsto f(t)g(x-t).$$

Par opérations usuelles,

- pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto h(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  ;
- pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto h(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  ;
- de plus, on a vu que

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, |h(x, t)| \leq \|g\|_{\infty} f(t),$$

où la fonction  $f$  est continue et intégrable sur  $\mathbb{R}$ , donc  $h$  vérifie l'hypothèse de domination.

Alors d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètre,

- pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto h(x, t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ , ce que l'on a déjà dit ;
- et  $\int_{\mathbb{R}} f * g : x \mapsto \int_{\mathbb{R}} h(x, t) dt$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

Le changement de variable  $u = x - t$  est une bijection de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , donc les fonctions  $t \mapsto f(t)g(x-t)$  et  $u \mapsto f(x-u)g(u)$  sont simultanément intégrables sur  $\mathbb{R}$  et

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)g(x-t) dt = \int_{\mathbb{R}} f(x-u)g(u) du,$$

l'est-à-dire  $f * g = g * f$ .

2. Utilisons le théorème de convergence dominée à paramètre continu.

Grâce à la question précédente, des hypothèses sont déjà vérifiées : la continuité de  $t \mapsto h(x, t)$  et la domination de  $h$  sont toujours valides. En outre, puisque  $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ ,  $\lim_{+\infty} g = 0$  donc par composition des limites, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x, t) = 0 = \ell(t)$  ; et bien-sûr, la fonction nulle,  $\ell$ , est continue sur  $\mathbb{R}$ .

En vertu du théorème annoncé, la fonction  $\ell$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  — ce qui n'est vraiment pas une surprise, et l'on peut permuter la limite et l'intégrale :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} h(x, t) dt = \int_{\mathbb{R}} \ell(t) dt = 0$ .

Autrement dit,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f * g(x) = 0$ .

De la même façon, sachant que  $\lim_{-\infty} g = 0$ ,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f * g(x) = 0.}$$

Finalement,  $f * g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ .

*Commentaire.* À l'époque du sujet, le théorème de convergence dominée à paramètre continu n'était pas au programme. Alors voici une rédaction conforme à l'énoncé.

Soit une suite réelle  $(x_n)$  tendant vers  $+\infty$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $h_n : t \mapsto h(x_n, t)$  de sorte que  $f * g(x_n) = \int_{\mathbb{R}} h_n(t) dt$  et appliquons le théorème de convergence dominée.

- Les  $h_n$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ .
- Soit  $t \in \mathbb{R}$ . On a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - t) = +\infty$ . Comme  $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ ,  $\lim_{y \rightarrow +\infty} g(y) = 0$ , donc par composition des limites,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} g(x_n - t) = 0$  ou encore  $\lim_{n \rightarrow +\infty} h_n(t) = 0$ . Ainsi, la suite de fonctions  $(h_n)$  converge simplement sur  $\mathbb{R}$  vers la fonction nulle.
- La fonction nulle est continue sur  $\mathbb{R}$  (*sic* :-)
- La domination précédente est reproductible :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, |h_n(t)| \leq \|g\|_{\infty} f(t),$$

où  $f$  est continue et intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

Alors, d'après le théorème de convergence dominée,

- les  $h_n$  et la fonction nulle sont intégrables sur  $\mathbb{R}$  ;
- on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} h_n(t) dt = \int_{\mathbb{R}} 0 dt = 0$ , autrement dit,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} f * g(x_n) = 0$ .

Par caractérisation séquentielle des limites, il s'ensuit que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f * g(x) = 0$ .

3. Soient  $f$  et  $g$  dans  $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ . Comme  $g$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ , pour les mêmes raisons qu'à la question 1,  $f * g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Elle est positive, car  $f$  et  $g$  le sont.

Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$f(t)g(x-t) \leq \|g\|_{\infty} f(t),$$

donc par croissance de l'intégrale,

$$\begin{aligned} f * g(x) &\leq \int_{\mathbb{R}} \|g\|_{\infty} f(t) dt \\ &= \|g\|_{\infty} \int_{\mathbb{R}} f(t) dt = \|g\|_{\infty}, \end{aligned}$$

donc  $f * g$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ .

Posons  $F : (x, y) \mapsto f(y)g(x-y)$ .

- Elle est continue sur  $\mathbb{R}^2$  car  $f$  et  $g$  le sont.
- *Condition 1.* Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto F(x, t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ , on l'a vu à la question 1. Soit  $y \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $v \in \mathbb{R}$ ,  $f(y)g(v-y) \leq \|f\|_{\infty} g(v-y)$ . En posant  $w = v - y$ , qui est une bijection de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , les fonctions  $v \mapsto g(v-y)$  et  $w \mapsto g(w)$  sont simultanément intégrables sur  $\mathbb{R}$  et

$$\int_{\mathbb{R}} g(v-y) dv = \int_{\mathbb{R}} g(w) dw = 1.$$

Ainsi,  $v \mapsto F(v, y)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

○ *Condition 3.* Soit  $y \in \mathbb{R}$ . En vertu de ce qu'on vient de voir,

$$\int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y) dx = f(y) \int_{\mathbb{R}} g(x-y) dx = f(y),$$

et la fonction  $y \mapsto \int_{\mathbb{R}} |F(x,y)| dx = f(y)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

D'après le théorème de Fubini, les fonctions

$$y \mapsto \int_{\mathbb{R}} F(x,y) dx = f(y)$$

$$\text{et } x \mapsto \int_{\mathbb{R}} F(x,y) dy = f * g(x)$$

sont intégrables sur  $\mathbb{R}$  et

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} f * g(x) dx &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y) dy \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \int_{\mathbb{R}} f(y)g(x-y) dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} f(y) dy = 1. \end{aligned}$$

Finalemment,  $f * g \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ .

4. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$|f(t)u(x-t)| \leq \|u\|_{\infty} f(t),$$

donc

$$\begin{aligned} |T_f(u)(x)| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(t)u(x-t) dt \right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(t)u(x-t)| dt \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \|u\|_{\infty} f(t) dt = \|u\|_{\infty}, \end{aligned}$$

donc  $\|T_f(u)\|_{\infty} \leq \|u\|_{\infty}$ .

5. On a

$$\begin{aligned} \underline{T_f T_g(u)} &= f * (g * u) = (f * g) * u = (g * f) * u \\ &= g * (f * u) = \underline{T_g T_f(u)}. \end{aligned}$$

6. On a

$$\begin{aligned} T_{f_1} T_{f_2}(u) - T_{g_1} T_{g_2}(u) &= T_{f_1} T_{f_2}(u) - T_{f_1} T_{g_2}(u) + T_{f_1} T_{g_2}(u) - T_{g_1} T_{g_2}(u) \\ &= T_{f_1} (T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u)) + T_{g_2} T_{f_1}(u) - T_{g_2} T_{g_1}(u) \\ &= T_{f_1} (T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u)) + T_{g_2} (T_{f_1}(u) - T_{g_1}(u)), \end{aligned}$$

donc,

$$\begin{aligned} \underline{\|T_{f_1} T_{f_2}(u) - T_{g_1} T_{g_2}(u)\|_{\infty}} &\leq \|T_{f_1} (T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u))\|_{\infty} \\ &\quad + \|T_{g_2} (T_{f_1}(u) - T_{g_1}(u))\|_{\infty} \\ &\leq \|T_{f_2}(u) - T_{g_2}(u)\|_{\infty} + \|T_{f_1}(u) - T_{g_1}(u)\|_{\infty}. \end{aligned}$$

7. Procédons par récurrence.

Si  $n = 1$ , c'est une évidence.

Pour  $n = 2$ , on vient de le faire : en posant  $f_1 = f_2 = f$  et  $g_1 = g_2 = g$ ,

$$\begin{aligned} &\|(T_f)^2(u) - (T_g)^2(u)\|_{\infty} \\ &\leq \|T_f(u) - T_g(u)\|_{\infty} + \|T_f(u) - T_g(u)\|_{\infty} \\ &= 2 \|T_f(u) - T_g(u)\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Supposons que ce soit vrai au rang  $n \geq 2$ . Sur le même principe de démonstration qu'à la question 6,

$$\begin{aligned} &\|(T_f)^{n+1}(u) - (T_g)^{n+1}(u)\|_{\infty} \\ &= \|(T_f)^n T_f(u) - (T_g)^n T_g(u)\|_{\infty} \\ &\leq \|(T_f)^n(u) - (T_g)^n(u)\|_{\infty} + \|T_f(u) - T_g(u)\|_{\infty} \\ &\leq n \|T_f(u) - T_g(u)\|_{\infty} + \|T_f(u) - T_g(u)\|_{\infty} \\ &= (n+1) \|T_f(u) - T_g(u)\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Alors, d'après le principe de récurrence, l'inégalité demandée est démontrée.

8. Pour commencer,  $g_h$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . De plus, le changement de variable  $x = yh$  est une bijection de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  donc les applications  $x \mapsto g_h(x)$  et  $y \mapsto g_h(yh)h = g_1(y)$  sont simultanément intégrables et

$$\int_{\mathbb{R}} g_h(x) dx = \int_{\mathbb{R}} g_1(y) dy = 1.$$

Donc  $g_h \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$ .

La fonction  $x \mapsto x g_h(x)$  est impaire donc

$$\underline{\int_{\mathbb{R}} x g_h(x) dx = 0.}$$

Faisons une intégration par parties que l'on justifiera ensuite.

$$\begin{aligned} \underline{\int_{\mathbb{R}} x^2 g_h(x) dx} &= \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x \frac{x}{h^2} e^{-\frac{x^2}{2h^2}} dx \\ &= \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \left[ -x e^{-\frac{x^2}{2h^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{h}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2h^2}} dx \\ &= h^2 \int_{\mathbb{R}} g_h(x) dx = \underline{h^2}. \end{aligned}$$

La dernière intégrale est celle de  $g_h$ , qui est intégrable sur  $\mathbb{R}$ . Le crochet a un sens car

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x e^{-\frac{x^2}{2h^2}} = 0.$$

Alors la première intégrale a un sens et l'intégration par parties est validée.

9. Introduisons sur  $\mathbb{R}$  la loi  $*$  définie par

$$h_1 * h_2 = \sqrt{h_1^2 + h_2^2},$$

avec volontairement le même symbole que pour le produit de convolution, de sorte que  $g_{h_1} * g_{h_2} = g_{h_1 * h_2}$ .

Alors,  $g_h * g_h = g_{h*h}$ , donc par une récurrence immédiate,  $(g_h)^{*n} = g_{h*^n}$ , où l'on utilise la même convention de notation pour la loi sur les réels  $h > 0$ , que sur les fonctions  $g$ . En outre,

$$\begin{aligned} h^{*2} &= \sqrt{h^2 + h^2} = \sqrt{2}h, \\ h^{*3} &= h^{*2} * h = \sqrt{(h^{*2})^2 + h^2} = \sqrt{2h^2 + h^2} \\ &= \sqrt{3}h \end{aligned}$$

et par une autre récurrence immédiate,  $h^{*n} = \sqrt{n}h$ . Il s'ensuit qu'en posant  $k = \frac{h}{\sqrt{n}}$ ,  $k^{*n} = \sqrt{n}k = h$  et  $(g_k)^{*n} = g_{k^{*n}} = g_h$ .

Soit  $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ . On a

$$\begin{aligned} (Tg_k)^n(u) &= \underbrace{(Tg_k \cdots Tg_k)}_{n \text{ fois}}(u) = \underbrace{(g_k * \cdots * g_k)}_{n \text{ fois}} * u \\ &= (g_k)^{*n} * u = g_h * u \\ &= T_{(g_k)^{*n}}(u) = T_{g_h}(u). \end{aligned}$$

Puisque c'est vrai pour tout  $u$ ,

$$\left| \left( Tg_{\frac{h}{\sqrt{n}}} \right)^n = T_{\left( g_{\frac{h}{\sqrt{n}}} \right)^{*n}} = T_{g_h} \right|$$

**10.** Procédons par récurrence sur  $k$ .

La propriété est clairement vraie pour  $k = 0$ , en posant  $P_{0,h}(x) = \frac{1}{h\sqrt{2\pi}}$ , qui est un polynôme de degré 0.

Supposons la propriété vraie pour un certain  $k$ . Alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} g_h^{(k+1)}(x) &= (g_h^{(k)})'(x) = \frac{d}{dx} (P_{k,h}(x) e^{-\frac{x^2}{2h^2}}) \\ &= (P'_{k,h}(x) - \frac{x}{h^2} P_{k,h}(x)) e^{-\frac{x^2}{2h^2}} \\ &= P_{k+1,h}(x) e^{-\frac{x^2}{2h^2}}, \end{aligned}$$

où  $P_{k+1,h}(x) = P'_{k,h}(x) - \frac{x}{h^2} P_{k,h}(x)$  est un polynôme de degré  $k + 1$ .

Ainsi, par récurrence, pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$ , il existe un polynôme  $P_{k,h}$  de degré  $k$  tel que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $g_h^{(k)}(x) = P_{k,h}(x) e^{-\frac{x^2}{2h^2}}$ .

**11.** Soient  $x \in [-a, a]$  et  $t \in \mathbb{R}$ . On a

$$\begin{aligned} P_{k,h}(x-t) e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}} \\ = P_{k,h}(x-t) e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}} e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}}. \end{aligned}$$

D'une part, la fonction  $y \mapsto P_{k,h}(y) e^{-\frac{y^2}{4h^2}}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . De plus, par croissance comparée, elle tend vers 0 en  $\pm\infty$ , donc elle est dans  $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$  et elle est bornée sur  $\mathbb{R}$ . En nommant  $M_{k,h}$  sa borne supérieure,

$$\left| P_{k,h}(x-t) e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}} \right| \leq M_{k,h}.$$

D'autre part, si  $t \in [-a, a]$ ,  $(x-t)^2 \geq 0$ , donc

$$e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}} \leq 1.$$

Et si  $t \notin [-a, a]$ ,  $|t| > a$ . Comme  $|x| \leq a$ , d'après la seconde inégalité triangulaire,

$$|x-t| \geq |t| - |x| \geq |t| - a > 0,$$

et par croissance du carré,  $(x-t)^2 \geq (|t| - a)^2$  et

$$e^{-\frac{(x-t)^2}{4h^2}} \leq e^{-\frac{(|t|-a)^2}{4h^2}}.$$

Alors posons

$$\phi_k(t) = \begin{cases} M_{k,h} & \text{si } |t| \leq a, \\ M_{k,h} e^{-\frac{(|t|-a)^2}{4h^2}} & \text{si } |t| > a. \end{cases}$$

Comme  $\lim_{|t| \rightarrow a^+} e^{-\frac{(|t|-a)^2}{4h^2}} = 1$ ,  $\phi_k$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . En outre, quand  $|t| \geq 1 + |a|$ ,  $|t| - a \geq 1$  donc  $(|t| - a)^2 \geq |t| - a$  et

$$\phi_k(t) \leq M_{k,h} e^{-\frac{|t|-a}{4h^2}} = M_{k,h} e^{\frac{a}{4h^2}} e^{-\frac{|t|}{4h^2}}$$

et comme  $\frac{1}{4h^2} > 0$ , la fonction  $t \mapsto e^{-\frac{|t|}{4h^2}}$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ . Donc  $\phi_k$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ . Enfin, par construction,

$$\left| P_{k,h}(x-t) e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}} \right| \leq \phi_k(t)$$

ce que l'on voulait. Ouf!

**12.** D'abord, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} T_{g_h}(u)(x) &= g_h * u(x) = u * g_h(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}} u(t) g_h(x-t) dt. \end{aligned}$$

Prouvons la classe  $\mathcal{C}^1$  de  $T_{g_h}(u)$ . Posons

$$\varphi : (x, t) \mapsto u(t) g_h(x-t),$$

de sorte que  $T_{g_h}(u)(x) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, t) dt$ .

○ Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto \varphi(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  car  $u$  et  $g_h$  le sont; elle est aussi intégrable sur  $\mathbb{R}$ , comme on l'a vu à la question 1.

○ Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \varphi(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  car  $g_h$  l'est. De plus, pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) &= u(t) g'_h(x-t) \\ &= u(t) P_{1,h}(x-t) e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}}. \end{aligned}$$

○ Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , car  $u$  et  $g'_h$  le sont.

○ D'après la question précédente, pour tout  $a > 0$ , tout  $x \in [-a, a]$  et tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) \right| \leq \|u\|_{\infty} \phi_1(t),$$

où  $\phi_1$  est continue et intégrable sur  $\mathbb{R}$ , donc  $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$  vérifie l'hypothèse de domination locale.

Alors d'après le théorème de la classe  $\mathcal{C}^1$  des intégrales dépendant d'un paramètre,

- pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ ;
- $\left[ T_{g_h}(u) \right]$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$ ;
- pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$(T_{g_h}(u))'(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, t) dt.$$

Prouvons que  $T_{g_h}(u)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

◦ Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto \varphi(x, t)$  est continue et intégrable sur  $\mathbb{R}$ .

◦ Pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $x \mapsto \varphi(x, t)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  car  $g_h$  l'est. De plus, pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et  $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(x, t) &= u(t) g_h^{(k)}(x - t) \\ &= u(t) P_{k,h}(x - t) e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}}. \end{aligned}$$

◦ Pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(x, t)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , car  $u$  et  $g_h^{(k)}$  le sont.

◦ D'après la question 11, pour tout  $a > 0$ , tout  $k \in \mathbb{N}$ , tout  $x \in [-a, a]$  et tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\left| \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(x, t) \right| \leq \|u\|_\infty \phi_k(t),$$

où  $\phi_k$  est continue et intégrable sur  $\mathbb{R}$ , donc  $\frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}$  vérifie l'hypothèse de domination locale.

Alors, par une récurrence immédiate, en utilisant le théorème de la classe  $\mathcal{C}^k$  des intégrales dépendant d'un paramètre,

- pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,  $t \mapsto \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(x, t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ ;
- $T_{g_h}(u)$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ ;
- pour tout  $k \in \mathbb{N}$  et  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$(T_{g_h}(u))^{(k)}(x) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\partial^k \varphi}{\partial x^k}(x, t) dt.$$

**13.** On sait déjà que  $T_{g_h}$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ . Soit  $k \in \mathbb{N}$ . Il s'agit de montrer que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (T_{g_h}(u))^{(k)}(x) = 0.$$

D'après la question 12, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} (T_{g_h}(u))^{(k)}(x) &= \int_{\mathbb{R}} u(t) P_{k,h}(x - t) e^{-\frac{(x-t)^2}{2h^2}} dt \\ &= u * \psi_{k,h}(x) = \psi_{k,h} * u(x), \end{aligned}$$

où l'on a posé  $\psi_{k,h} : x \mapsto P_{k,h}(x) e^{-\frac{x^2}{2h^2}}$ .

Dans la question 2, on a prouvé que pour  $f \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$  et  $g \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ ,  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f * g(x) = 0$ . Mais dans la preuve, on n'a pas utilisé que  $\int_{\mathbb{R}} f = 1$ , mais seulement que  $f$  est continue et intégrable sur  $\mathbb{R}$ . Alors, on peut utiliser le résultat pour  $\psi_{k,h}$  qui est continue et intégrable sur  $\mathbb{R}$  (son intégrabilité vient de la domination de la question 11).

Ainsi,  $T_{g_h}(u) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ .

**14.** En posant  $t = hx$ , pour  $t > 0$ , on a

$$\int_{\alpha}^{+\infty} g_h(t) dt = \int_{\alpha/h}^{+\infty} g_1(x) dx.$$

Comme  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \alpha/h = +\infty$  et que  $g_1$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ ,  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{\alpha/h}^{+\infty} g_1(x) dx = 0$ , donc

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{\alpha}^{+\infty} g_h(t) dt = 0.$$

Par parité,  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{-\alpha} g_h(t) dt = 0$ .

**15.** Soient  $\varepsilon > 0$  et  $x \in \mathbb{R}$ . Comme  $\int_{\mathbb{R}} g_h = 1$ ,

$$\begin{aligned} T_{g_h}(u)(x) - u(x) &= \int_{\mathbb{R}} g_h(t) u(x - t) dt - u(x) \int_{\mathbb{R}} g_h(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} g_h(t) (u(x - t) - u(x)) dt. \end{aligned}$$

D'après le résultat de l'énoncé, il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $(p, q) \in \mathbb{R}^2$ , si  $|p - q| \leq \alpha$  alors  $|u(p) - u(q)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Fixons un tel  $\alpha$  et coupons l'intégrale en trois :

$$\begin{aligned} |T_{g_h}(u)(x) - u(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} g_h(t) |u(x - t) - u(x)| dt \\ &= \left( \int_{-\infty}^{-\alpha} + \int_{-\alpha}^{\alpha} + \int_{\alpha}^{+\infty} \right) g_h(t) |u(x - t) - u(x)| dt \\ &= \left( \int_{-\infty}^{-\alpha} + \int_{\alpha}^{+\infty} \right) g_h(t) |u(x - t) - u(x)| dt \\ &\quad + \int_{-\alpha}^{\alpha} g_h(t) |u(x - t) - u(x)| dt. \end{aligned}$$

D'une part, pour tout  $t \in [-\alpha, \alpha]$ ,  $|x - t - x| \leq \alpha$ , donc  $|u(x - t) - u(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$  et

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha}^{\alpha} g_h(t) |u(x - t) - u(x)| dt &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} g_h(t) dt \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\mathbb{R}} g_h(t) dt = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

D'autre part, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$|u(x - t) - u(x)| \leq |u(x - t)| + |u(x)| \leq 2\|u\|_\infty,$$

donc

$$\begin{aligned} \left( \int_{-\infty}^{-\alpha} + \int_{\alpha}^{+\infty} \right) g_h(t) |u(x - t) - u(x)| dt \\ \leq 2\|u\|_\infty \left( \int_{-\infty}^{-\alpha} + \int_{\alpha}^{+\infty} \right) g_h(t) dt. \end{aligned}$$

D'après la question 14,

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} 2\|u\|_\infty \left( \int_{-\infty}^{-\alpha} + \int_{\alpha}^{+\infty} \right) g_h(t) dt = 0,$$

donc il existe  $H > 0$  tel que pour tout  $h \in [0, H]$ ,

$$2\|u\|_\infty \left( \int_{-\infty}^{-\alpha} + \int_{\alpha}^{+\infty} \right) g_h(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors, pour tout  $h \in [0, H]$ ,

$$|T_{g_h}(u)(x) - u(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Comme c'est vrai pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , on en tire que  $\|T_{g_h}(u) - u\|_\infty \leq \varepsilon$  donc

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \|T_{g_h}(u) - u\|_\infty = 0.$$

16. Soient  $n \in \mathbb{N}$  et  $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ . D'après les questions 13 & 15, pour tout  $h > 0$ ,  $T_{g_h}(u) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$  et  $\lim_{h \rightarrow 0^+} \|T_{g_h}(u) - u\|_\infty = 0$ . Soit donc  $h > 0$ . En écrivant  $u = u - T_{g_h}(u) + T_{g_h}(u)$  et grâce à la linéarité de  $T_{f_n}$  et  $T_f$ , on a

$$\begin{aligned} & T_{f_n}(u) - T_f(u) \\ &= T_{f_n}(u - T_{g_h}(u)) + T_{f_n}T_{g_h}(u) \\ &\quad - T_f(u - T_{g_h}(u)) - T_fT_{g_h}(u) \\ &= T_{f_n}(u - T_{g_h}(u)) - T_f(u - T_{g_h}(u)) \\ &\quad + T_{f_n}T_{g_h}(u) - T_fT_{g_h}(u). \end{aligned}$$

Alors, en utilisant la question 4,

$$\begin{aligned} & \|T_{f_n}(u) - T_f(u)\|_\infty \\ &\leq \|T_{f_n}(u - T_{g_h}(u))\|_\infty + \|T_f(u - T_{g_h}(u))\|_\infty \\ &\quad + \|T_{f_n}T_{g_h}(u) - T_fT_{g_h}(u)\|_\infty \\ &\leq \|u - T_{g_h}(u)\|_\infty + \|u - T_{g_h}(u)\|_\infty \\ &\quad + \|T_{f_n}T_{g_h}(u) - T_fT_{g_h}(u)\|_\infty. \end{aligned}$$

D'après la question 15, il existe  $h > 0$  tel que

$$\|u - T_{g_h}(u)\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Fixons un tel  $h > 0$ . Comme  $T_{g_h}(u) \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ , d'après l'hypothèse, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,

$$\|T_{f_n}(T_{g_h}(u)) - T_f(T_{g_h}(u))\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Alors,

$$\|T_{f_n}(u) - T_f(u)\|_\infty \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Autrement dit, pour tout  $u \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_{f_n}(u) - T_f(u)\|_\infty = 0,$$

et  $(f_n)$  converge faiblement vers  $f$ .

17. Comme  $u$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , en écrivant un développement limité à l'ordre 2 en  $x$ ,

$$u(x-t) = u(x) - tu'(x) + \frac{1}{2}t^2 u''(x) + o(t^2)$$

$$\left| \text{donc } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{u(x-t) - u(x) + tu'(x)}{t^2} = \frac{1}{2} u''(x). \right|$$

On sait que  $\int_{\mathbb{R}} t f(t) dt = 0$  donc en changeant  $t$  en  $\sqrt{n}t$ ,  $\int_{\mathbb{R}} t f_n(t) dt = 0$ . De plus,  $\int_{\mathbb{R}} f_n(t) dt = \int_{\mathbb{R}} f_n^\#(t) dt = 1$ . Alors

$$\begin{aligned} & \left| n(T_{f_n}(u)(x) - u(x)) - \frac{1}{2}u''(x) \right| \\ &= \int_{\mathbb{R}} n f_n(t) u(x-t) dt - nu(x) \int_{\mathbb{R}} f_n(t) dt \\ &\quad + nu'(x) \int_{\mathbb{R}} t f_n(t) dt - \frac{1}{2}u''(x) \int_{\mathbb{R}} f_n^\#(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} n f_n(t) (u(x-t) - u(x) + tu'(x)) dt \\ &\quad - \frac{1}{2}u''(x) \int_{\mathbb{R}} f_n^\#(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathbb{R}} nt^2 f_n(t) \frac{u(x-t) - u(x) + tu'(x)}{t^2} dt \\ &\quad - \frac{1}{2}u''(x) \int_{\mathbb{R}} f_n^\#(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} f_n^\#(t) \frac{u(x-t) - u(x) + tu'(x)}{t^2} dt \\ &\quad - \frac{1}{2}u''(x) \int_{\mathbb{R}} f_n^\#(t) dt \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left( \frac{u(x-t) - u(x) + tu'(x)}{t^2} - \frac{1}{2}u''(x) \right) f_n^\#(t) dt. \end{aligned}$$

18. Soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $\varepsilon > 0$ . Posons

$$\delta : t \mapsto \frac{u(x-t) - u(x) + tu'(x)}{t^2} - \frac{1}{2}u''(x).$$

D'après la question 17,  $\lim_{t \rightarrow 0} \delta(t) = 0$ , donc il existe  $\alpha > 0$  tel que pour tout  $t \in [-\alpha, \alpha]$ ,

$$|\delta(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Fixons un tel  $\alpha$  et découpons l'intégrale précédente. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}} \delta(t) f_n^\#(t) dt \right| \leq \int_{\mathbb{R}} |\delta(t)| f_n^\#(t) dt \\ &= \left( \int_{-\infty}^{-\alpha} + \int_{\alpha}^{+\infty} \right) |\delta(t)| f_n^\#(t) dt + \int_{-\alpha}^{\alpha} |\delta(t)| f_n^\#(t) dt. \end{aligned}$$

D'une part,

$$\begin{aligned} & \int_{-\alpha}^{\alpha} |\delta(t)| f_n^\#(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{-\alpha}^{\alpha} f_n^\#(t) dt \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2} \int_{\mathbb{R}} f_n^\#(t) dt = \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

D'autre part,  $\delta$  est prolongée par continuité en 0. De plus, comme  $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\delta$  admet des limites finies en  $\pm\infty$  donc  $\delta$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ . Alors

$$\begin{aligned} & \left( \int_{-\infty}^{-\alpha} + \int_{\alpha}^{+\infty} \right) |\delta(t)| f_n^\#(t) dt \\ & \leq \|\delta\|_\infty \left( \int_{-\infty}^{-\alpha} + \int_{\alpha}^{+\infty} \right) f_n^\#(t) dt. \end{aligned}$$

En outre, en posant  $s = \sqrt{n}t$ ,

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{+\infty} f_n^\#(t) dt = n^{3/2} \int_{\alpha}^{+\infty} t^2 f(\sqrt{n}t) dt \\ &= \int_{\sqrt{n}\alpha}^{+\infty} s^2 f(s) ds \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \end{aligned}$$

car  $t \mapsto t^2 f(t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ . De même,  $\int_{-\infty}^{-\alpha} f_n^\#(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Alors il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,

$$\|\delta\|_\infty \left( \int_{-\infty}^{-\alpha} + \int_{\alpha}^{+\infty} \right) f_n^\#(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Donc  $\left| \int_{\mathbb{R}} \delta(t) f_n^\#(t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$ , c'est-à-dire

$$\left| n(T_{f_n}(u)(x) - u(x)) - \frac{1}{2}u''(x) \right| \leq \varepsilon.$$

Comme c'est vrai pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\left\| n(T_{f_n}(u) - u) - \frac{1}{2}u'' \right\|_{\infty} \leq \varepsilon,$$

$$\left[ \text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| n(T_{f_n}(u) - u) - \frac{1}{2}u'' \right\|_{\infty} = 0. \right]$$

**19.** Soient  $u \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R})$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ . D'après la question 9,  $T_{g_1} = T_{g_{\frac{1}{\sqrt{n}}}}^n$ . De plus, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$g_{\frac{1}{\sqrt{n}}}(x) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{nx^2}{2}} = \sqrt{n}g_1(\sqrt{n}x).$$

Et d'après la question 8, l'on sait aussi que  $\int_{\mathbb{R}} x^2 g_1(x) dx$  converge et que  $\int_{\mathbb{R}} x g_1(x) dx = 0$ . Ainsi,  $g_{\frac{1}{\sqrt{n}}}$  joue par rapport à  $g_1$  le même rôle que  $f_n$  par rapport à  $f$ , et d'après la question 18,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left\| n(T_{g_{\frac{1}{\sqrt{n}}}}(u) - u) - \frac{1}{2}u'' \right\|_{\infty} = 0.$$

En utilisant la question 7, on a donc

$$\|T_{f_n}^n(u) - T_{g_1}(u)\|_{\infty} = \|T_{f_n}^n(u) - T_{g_{\frac{1}{\sqrt{n}}}}^n(u)\|_{\infty}$$

$$\leq n \|T_{f_n}(u) - T_{g_{\frac{1}{\sqrt{n}}}}(u)\|_{\infty}$$

$$= \|n(T_{f_n}(u) - T_{g_{\frac{1}{\sqrt{n}}}}(u))\|_{\infty}$$

$$= \left\| n(T_{f_n}(u) - u) - \frac{1}{2}u'' - n(T_{g_{\frac{1}{\sqrt{n}}}}(u) - u) + \frac{1}{2}u'' \right\|_{\infty}$$

$$\leq \left\| n(T_{f_n}(u) - u) - \frac{1}{2}u'' \right\|_{\infty}$$

$$+ \left\| n(T_{g_{\frac{1}{\sqrt{n}}}}(u) - u) - \frac{1}{2}u'' \right\|_{\infty}.$$

Comme ses deux expressions tendent vers 0 quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , on peut conclure que

$$\left[ \lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_{f_n}^n(u) - T_{g_1}(u)\|_{\infty} = 0. \right]$$

D'après un calcul de la question 9, on a  $T_{f_n}^n = T_{f_n^{*n}}$ , donc on vient de prouver que pour tout  $u \in \mathcal{C}_0^{\infty}(\mathbb{R})$ ,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|T_{f_n^{*n}}(u) - T_{g_1}(u)\|_{\infty} = 0$ . D'après la question 16, cela entraîne que

$$\left[ \text{la suite } (f_n^{*n}) \text{ converge faiblement vers } g_1. \right]$$