Dixième devoir de révision

[E3A18]
Durée 4h
L'usage de calculatrices est interdit.

Exercice 1

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On désigne par $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices symétriques réelles.

Dans tout l'exercice, E est l'espace vectoriel euclidien usuel $\mathbb{R}^n$ dont le produit scalaire est noté $\langle \mid \rangle$.

Soit $\mathscr{C} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E.

1. Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
Montrer l'équivalence des trois propositions suivantes :

(1) $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tX\,A\,X \geqslant 0$

(2) $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $\lambda \geqslant 0$

(3) $\exists B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^2$.

On dit dans ce cas que la matrice A est symétrique positive et on note $\mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble de telles matrices.

2. Soient J la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les termes sont égaux à 1 et α un réel. On pose $M = -J + (\alpha+1)\,I_n$ où I_n est la matrice de l'endomorphisme identité de E.

2.1. Déterminer les éléments propres de J. En déduire ceux de M.

2.2. Pour quelles valeurs de α a-t-on $M \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$? Montrer qu'alors $\mathrm{rg}(M) \geqslant n-1$.

3. Soient $A \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ et a l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{C}$ est A.

3.1. Justifier l'existence d'une base orthonormale $\mathscr{B} = (u_1, \dots, u_n)$ de E constituée de vecteurs propres de l'endomorphisme a.

On notera pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, λ_i la valeur propre associée au vecteur propre u_i.

3.2. Soit b l'endomorphisme de E défini par : $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $b(u_i) = \sqrt{\lambda_i}\,u_i$.

Justifier que b est un endomorphisme symétrique.

3.3. Démontrer que : $\mathrm{Ker}(a) = \mathrm{Ker}(b)$.

4. Soit $A = (a_{ij}) \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ telle que : $\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, $(i \neq j \Longrightarrow a_{ij} < 0)$.

a est toujours l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base $\mathscr{C}$ est A et b l'endomorphisme de E tel que défini à la question **3.2**.

4.1. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on pose $z_i = b(e_i)$.

On va montrer que la famille $(z_1, \dots, z_{n-1})$ est libre.

Dans ce but, on considère des scalaires $(\gamma_i)_{i \in [\![1, n-1]\!]}$ tels que $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i\, z_i = 0$.

4.1.1. Montrer que l'on a aussi : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i|\, z_i = 0$.

4.1.2. En utilisant le produit scalaire $\left\langle \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i|\, z_i, z_n \right\rangle$, conclure.

4.2. Prouver que : $\mathrm{rg}(A) \geqslant n-1$.

Exercice 2

On rappelle que pour deux entiers naturels r et ℓ, $\binom{r}{\ell}$ désigne le nombre de parties à ℓ éléments d'un ensemble à r éléments.

Soient n un entier naturel non nul et X et Y deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathbf{P})$ et prenant leurs valeurs dans $[\![1, n+1]\!]$.

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2,$$
$$\mathbf{P}([X = i] \cap [Y = j]) = \alpha \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}$$

1. Montrer de deux manières différentes que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

2. Déterminer la valeur du réel α.

3. Donner les lois des variables aléatoires X et Y. Ces deux variables aléatoires sont-elles indépendantes ?

4. Reconnaitre la loi de la variable aléatoire $Z = X - 1$. Donner alors l'espérance et la variance de X.

5. Soient p, q et r trois entiers naturels et A un ensemble fini de cardinal $p+q$.

En **dénombrant de deux façons différentes** les parties de A de cardinal r, montrer que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{r} \binom{p}{k} \binom{q}{r-k} = \binom{p+q}{r}$$

On pourra remarquer que $k + (r-k) = r$ et s'aider d'un schéma illustrant cette situation.

6. En déduire la valeur de : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$.

7. On note $B \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient de la ligne i et de la colonne j est

$$b_{ij} = \mathbf{P}([(X,Y) = (i,j)]).$$

7.1. Déterminer le rang de la matrice B.

7.2. Déterminer la valeur de $\mathrm{Tr}(B)$, la trace de la matrice B.

Exercice 3

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On note $\mathscr{M}_n = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des matrices carrées à n lignes et n colonnes et à coefficients réels.

Dans tout l'exercice, une matrice de $\mathscr{M}_n$ est dite diagonalisable si elle est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n$.

$\mathscr{D}_n$ désigne l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathscr{M}_n$, $\mathscr{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques de $\mathscr{M}_n$, et $\mathscr{A}_n$ celui des matrices antisymétriques de $\mathscr{M}_n$.

Question de cours : Donner sans démonstration les dimensions des espaces vectoriels $\mathscr{S}_n$ et $\mathscr{A}_n$.

Partie 1

On prend dans cette partie $n = 2$.

1. Exhiber un sous-espace vectoriel de dimension 3 de $\mathscr{M}_2$ constitué de matrices diagonalisables.

2. En déduire la dimension maximale d'un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2$ contenu dans $\mathscr{D}_2$.

3. $\mathscr{D}_2$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2$? Justifier.
On pourra utiliser des arguments de dimension.

4. Déterminer alors tous les sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_2$ contenant $\mathscr{D}_2$.

5. Soient $\varOmega = \left\{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mid (a-d)^2 + 4bc > 0\right\}$ et $F = \left\{\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \mid (a-d)^2 + 4bc \geqslant 0\right\}$.

5.1. Montrer que $\varOmega$ est un ouvert de $\mathscr{M}_2$ et F un fermé de $\mathscr{M}_2$.

5.2. Prouver que l'on a : $\varOmega \subset \mathscr{D}_2 \subset F$.

5.3. $\mathscr{D}_2$ est-il un fermé de $\mathscr{M}_2$? un ouvert de $\mathscr{M}_2$? Justifier.

Partie 2

On revient au cas général avec $n > 2$.

1. Soient $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n$ et $B = (b_{ij}) \in \mathscr{M}_n$ définies par :

- $a_{11} = a_{12} = 1$, $a_{22} = -1$ et $a_{ij} = 0$ sinon
- $b_{11} = -1$, $b_{12} = b_{22} = 1$ et $b_{ij} = 0$ sinon

1.1. Vérifier que A et B sont diagonalisables.

1.2. $\mathscr{D}_n$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n$? Justifier.

2. Soit $N \in \mathscr{M}_n$, antisymétrique.
Démontrer que l'ensemble des valeurs propres réelles de N est inclus dans $\{0\}$.
(*On pourra calculer le produit matriciel* ${}^tX\,N\,X$ *pour un vecteur* X *de* $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$).

3. Soit S un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n$ contenu dans $\mathscr{D}_n$. Déterminer $S \cap \mathscr{A}_n$.
En déduire la dimension maximale d'un tel sous-espace vectoriel S. On donnera un exemple d'un sous-espace réalisant cette condition.

4. Soit un matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
On note f_P l'application linéaire qui à une matrice $M \in \mathscr{M}_n$ associe la matrice $P^{-1}M\,P$.

4.1. Vérifier que f_P est un automorphisme de $\mathscr{M}_n$ et expliciter f_P^{-1}.
En déduire la dimension de $\mathscr{S}_P = f_P(\mathscr{S}_n)$.

4.2. Prouver que l'on a : $\mathscr{S}_P \subset \mathscr{D}_n$.

4.3. Démontrer enfin que : $\mathscr{D}_n = \displaystyle\bigcup_{P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} \mathscr{S}_P$.

5. On note $\{E_{ij}, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2\}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n$ où E_{ij} est la matrice de $\mathscr{M}_n$ dont tous les coefficients sont nuls excepté celui de la ligne i et colonne j qui vaut 1.

5.1. Donner sans démonstration une base $\mathscr{B}_1$ de $\mathscr{S}_n$.

5.2. Pour tout couple (i,j) de $[\![1,n]\!]^2$ où $i < j$, on pose $T_{ij} = 4E_{ji} + E_{ij}$.
Soit P la matrice diagonale dont les termes diagonaux sont $(1,\dots,1,2,1,\dots,1)$ où le 2 est à la j-ème position.
Décomposer la matrice $P^{-1}T_{ij}\,P$ dans la base canonique de $\mathscr{M}_n$. On pourra utiliser l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé à T_{ij}.
Justifier alors que la matrice T_{ij} est diagonalisable.

5.3. Soit $\mathscr{T} = \mathrm{Vect}(T_{ij}, (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, i < j)$. Prouver que $\mathscr{M}_n = \mathscr{T} \oplus \mathscr{S}_n$.
En déduire une base de $\mathscr{M}_n$ constituée de matrices toutes diagonalisables.

5.4. Déterminer enfin tous les sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_n$ contenant $\mathscr{D}_n$.

Exercice 4

1. Proposer une fonction python `maxi` prenant en argument une liste d'entiers naturels `L` et renvoyant le maximum des entiers de cette liste.
On n'utilisera pas de fonction spécifique de python déterminant ce maximum.

2. Écrire une fonction `ind` prenant en argument une liste d'entiers naturels `L` et renvoyant la liste des indices `[i_1,...,i_r]` avec `i_1<...<i_r` telle que pour tout $k \in [\![1,r]\!]$, `L[i_k]` soit non nul.
Par exemple si `L = [0,1,3,0,7]`, alors `ind(L)` renvoie `[1,2,4]`.

3. Écrire une fonction `nb_oc` prenant comme argument une liste d'entiers naturels `L` et renvoyant la liste `T` de longueur `M = maxi(L)+1` où, pour tout $i \in [\![0,M]\!]$, `T[i]` est le nombre d'occurrences dans la liste `L` de l'entier `i`.
Par exemple, si `L = [3,1,4,1,5]`, alors `T = [0,2,0,1,1,1]`.
On pourra utiliser la fonction `maxi`.

4.

4.1. Soit `L` une liste d'entiers naturels. Déterminer le nombre de fois, noté `n`, où la liste `L` est parcourue lors de l'exécution de `nb_oc(L)`.

4.2. On veut que `n` soit indépendant de `M`.
Si ce n'est pas le cas, modifier la fonction `nb_oc` afin de respecter cette condition.

5. Soit A une liste d'entiers. On définit la suite de Robinson $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée à la suite A par récurrence comme suit

- $L_0 = A$.
- Si L_n est construite, alors :
  - on détermine $T_n = \texttt{nb\_oc}(L_n)$.
  - on détermine $I_n = \texttt{ind}(T_n)$.
  - si $I_n = [i_1,\dots,i_r]$, alors $L_{n+1} = \big[T[i_r], i_r, \dots, T[i_1], i_1\big]$.

Par exemple si $A = [4,4,1,2]$, alors :

- $L_0 = [4,4,1,2]$
- $L_1 = [2,4,1,2,1,1]$ (il y a deux « 4 », un « 2 » et un « 1 » dans la liste L_0)
- $L_2 = [1,4,2,2,3,1]$ (il y a un « 4 », deux « 2 » et trois « 1 » dans la liste L_1)

5.1. On donne `A = [2,0,4,1,3,3,2,3,1,1]`. Déterminer L_3 et L_{2018}.

5.2. On donne `B = [2,4,1,1,1,2]`. Si l'on suppose que $L_1 = B$, donner toutes les solutions possibles pour L_0.

5.3. On donne `C = [2,4,1,0]`. Si l'on suppose que $L_1 = C$, donner toutes les solutions possibles pour L_0.

5.4. Proposer alors une fonction `rob(A,n)` qui prend en arguments une liste d'entiers naturels `A` et un entier naturel `n` et qui renvoie l'élément L_n de la suite de Robinson associée à `A`.