Corrigé du dixième devoir de révision

Exercice 1

1. Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

Supposons (1). Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et soit $X \neq 0$ un vecteur propre associé. Comme $AX = \lambda X$,
$$^tX\,A\,X = \lambda\,^tX\,X.$$
Par hypothèse, $^tX\,A\,X \geqslant 0$, c'est-à-dire $\lambda\,^tX\,X \geqslant 0$. Or $X \neq 0$, donc $^tX\,X = \|X\|^2 > 0$. Alors $\lambda \geqslant 0$ et (2) est vraie.

Supposons (2). Comme A est symétrique réelle, on peut écrire $A = P\,D\,^tP$, où $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ et $P \in O(n)$, en notant $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A, non nécessairement distinctes.

Comme les λ_i sontpositifs, considérons
$$B = P\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\,)\,^tP.$$
Par construction, on voit que $B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. De plus,
$$\begin{aligned} B^2 &= P\,\mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n}\,)^2\,^tP \\ &= P\,\mathrm{diag}((\sqrt{\lambda_1})^2, \dots, (\sqrt{\lambda_n})^2\,)\,^tP \\ &= P\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n\,)\,^tP = A, \end{aligned}$$
donc (3) est vraie.

Supposons (3). Soit $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Comme $B = {}^tB$,
$$^tXAX = {}^tXB^2X = {}^tX^tBBX = {}^t(BX)BX = \|BX\|^2 \geqslant 0,$$
et (1) est vraie.

Ainsi, les trois propositions sont équivalentes.

2.1. Comme J est symétrique réelle, elle est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont orthogonaux.

Clairement, $\mathrm{rg}(J) = 1 < n$, donc 0 est valeur propre de J et $\dim(E_0(J)) = n-1$. Puisque J est diagonalisable, 0 est donc de multiplicité $n-1$ et il manque une valeur propre. On peut la déterminer avec la trace. Voici un autre moyen.

Clairement, la somme des colonnes de J est la colonne remplie de n. Plus précisément, en nommant C_j les colonnes de J,
$$C_1 + \cdots + C_n = \begin{pmatrix} n \\ \vdots \\ n \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$
On peut interpréter cette relation comme suit :
$$\begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = n \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$
ou encore $JU = nU$, en nommant U la colonne remplie de 1. Cela signifie que n est la valeur propre qui manque et $\dim(E_n(J)) = 1$. De plus, on voit que $U \in E_n(J)$, d'où $E_n(J) = \mathbb{R}U$. Et comme $E_0(J) \perp E_n(J)$, $E_0(J) = U^\perp$.

Finalement, $\mathrm{Sp}(J) = \{0, n\}$, $E_n(J) = \mathbb{R}\,U$ et $E_0(J) = U^\perp$.

Alors, puisque $M = -J + (\alpha+1)\,I_n$,
$$\begin{aligned} &\mathrm{Sp}(M) = \{\alpha+1, -n+\alpha+1\}, \\ &E_{\alpha-n+1}(M) = E_n(J) = \mathbb{R}U \\ &\text{et } E_{\alpha+1}(M) = E_0(J) = U^\perp. \end{aligned}$$

2.2. Déjà, comme combinaison linéaire de matrices symétriques, M est symétrique. Dire que $M \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$ signifie d'après la propriété (2) de la question 1 que $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+$, donc que $\alpha+1 \geqslant 0$ et $\alpha-n+1 \geqslant 0$, c'est-à-dire $\alpha \geqslant n-1$.

Si c'est le cas, $\alpha + 1 \geqslant n > 0$.

Si $\alpha = n-1$, $\alpha - n + 1 = 0$ est valeur propre de M et $E_0(M) = E_n(J)$ est une droite, donc $\mathrm{rg}(M) = n-1$.

Si $\alpha > n-1$, $\alpha - n + 1 > 0$ et $0 \notin \mathrm{Sp}(M)$, donc $\mathrm{rg}(M) = n$.

Ainsi, si $M \in \mathscr{S}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathrm{rg}(M) \geqslant n-1$.

3.1. Oui, d'après le théorème spectral.

3.2. La matrice de b dans la base orthonormée $\mathscr{B}$ est diagonale, donc symétrique,

donc b est un endomorphisme symétrique.

3.3. Par construction, $a = b^2$. En outre $\mathrm{Ker}(b) \subset \mathrm{Ker}(b^2)$, donc $\mathrm{Ker}(b) \subset \mathrm{Ker}(a)$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(a)$: $a(x) = 0$. On a
$$0 = \langle\, x \,|\, a(x)\,\rangle = \langle\, x \,|\, b(b(x))\,\rangle = \langle\, b(x) \,|\, b(x)\,\rangle = \|b(x)\|^2$$
donc $b(x) = 0$ et $x \in \mathrm{Ker}(b)$. D'où $\mathrm{Ker}(a) \subset \mathrm{Ker}(b)$.

4.1.1. Considérons les deux ensembles d'indices
$$\begin{aligned} I &= \{i \in [\![1, n-1]\!] \mid \gamma_i \geqslant 0\} \\ \text{et } J &= \{i \in [\![1, n-1]\!] \mid \gamma_i < 0\}. \end{aligned}$$
L'un ou l'autre peut être vide. On a donc $\gamma_i = |\gamma_i|$ si $i \in I$ et $\gamma_j = -|\gamma_j|$ si $j \in J$. La combinaison linéaire de l'énoncé devient donc
$$0 = \sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i\, z_i = \sum_{i \in I} |\gamma_i|\, z_i - \sum_{j \in J} |\gamma_j|\, z_j$$
ou encore
$$\sum_{i \in I} |\gamma_i|\, z_i = \sum_{j \in J} |\gamma_j|\, z_j.$$
Nommons x ce vecteur :
$$x = \sum_{i \in I} |\gamma_i|\, z_i = \sum_{j \in J} |\gamma_j|\, z_j.$$
Alors
$$\begin{aligned} \|x\|^2 = \langle x | x \rangle &= \left\langle \sum_{i \in I} |\gamma_i|\, z_i \,\middle|\, \sum_{j \in J} |\gamma_j|\, z_j \right\rangle \\ &= \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} |\gamma_i|\,|\gamma_j|\,\langle z_i \,|\, z_j \rangle. \end{aligned}$$
Soit $(i, j) \in I \times J$. Comme $I \cap J = \varnothing$, $i \neq j$. On a
$$\begin{aligned} \langle z_i \,|\, z_j \rangle &= \langle b(e_i) \,|\, b(e_j) \rangle \\ &= \langle e_i \,|\, b(b(e_j)) \rangle && \text{car } b \text{ est symétrique} \\ &= \langle e_i \,|\, a(e_j) \rangle && \text{car } b^2 = a \\ &= a_{ij} && (*) \\ &< 0 && \text{car } i \neq j. \end{aligned}$$

$(*)$ car a_{ij} est la i^{e} coordonnée de $a(e_j)$ dans la base $\mathscr{C}$, laquelle est orthonormée, donc $a_{ij} = \langle e_i \,|\, a(e_j)\rangle$.

Alors d'une part $\|x\| \geqslant 0$ et d'autre part,

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} |\gamma_i|\,|\gamma_j|\,\langle z_i \,|\, z_j\rangle \leqslant 0.$$

Donc $\|x\| = 0$ et $x = 0$. Cela signifie que

$$\sum_{i \in I} |\gamma_i|\, z_i = \sum_{j \in J} |\gamma_j|\, z_j = 0,$$

donc en les sommant,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i|\, z_i = \sum_{i \in I} |\gamma_i|\, z_i + \sum_{j \in J} |\gamma_j|\, z_j = 0.}$$

4.1.2. Alors

$$\begin{aligned} 0 &= \left\langle \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i|\, z_i \;\middle|\; z_n \right\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i|\,\langle z_i \,|\, z_n\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i|\,\langle b(e_i) \,|\, b(e_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i|\,\langle e_i \,|\, b(b(e_n))\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i|\,\langle e_i \,|\, a(e_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} |\gamma_i|\, a_{in}. \end{aligned}$$

En effet, d'une part b est symétrique ; et d'autre part, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, a_{ij} est la i^{e} coordonnée de $a(e_j)$ dans la base $\mathscr{C}$, laquelle est orthonormée, donc $a_{ij} = \langle e_i \,|\, a(e_j)\rangle$.

Or par hypothèse, pour tout $i < n$, $a_{in} < 0$. Donc les termes de cette somme sont tous réels négatifs ou nuls, donc puisque leur somme est nulle, ils sont nuls : pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $|\gamma_i|\, a_{in} = 0$; mais $a_{in} \neq 0$, donc $|\gamma_i| = 0$, et $\gamma_i = 0$.

Ainsi, si $\sum_{i=1}^{n-1} \gamma_i\, z_i = 0$, les γ_i sont tous nuls, ce qui signifie que $\boxed{\text{la famille } (z_1, \ldots, z_{n-1}) \text{ est libre.}}$

4.2. Les vecteurs $z_i = b(e_i)$ forment donc une famille libre de $\mathrm{Im}(b)$, donc $\mathrm{rg}(b) \geqslant n-1$. Or $\mathrm{Ker}(a) = \mathrm{Ker}(b)$, donc $\mathrm{rg}(a) = \mathrm{rg}(b)$, d'où $\mathrm{rg}(a) \geqslant n-1$ et

$$\boxed{\mathrm{rg}(A) \geqslant n-1.}$$

Exercice 2

1. Première façon. D'après le binôme de Newton,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$

Deuxième façon. Considérons un ensemble E de cardinal n. On sait que l'ensemble $\mathscr{P}(E)$ de ses parties a pour cardinal 2^n. Dénombrons $\mathscr{P}(E)$ d'après le cardinal de ses éléments : toute partie $A \subset E$ a un cardinal $k \in [\![0,n]\!]$; autrement dit,

$$\mathscr{P}(E) = \{A \subset E\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{A \subset E \mid \operatorname{card} A = k\}.$$

Comme une partie $A \subset E$ n'a qu'un cardinal, les ensembles $\{A \subset E \mid \operatorname{card} A = k\}$ sont disjoints, donc

$$(*) \qquad \operatorname{card}(\mathscr{P}(E)) = \sum_{k=0}^{n} \operatorname{card}(\{A \subset E \mid \operatorname{card} A = k\}).$$

Et d'après l'énoncé — et le cours :-) — le nombre de parties de E ayant k éléments est précisément

$$\operatorname{card}(\{A \subset E \mid \operatorname{card} A = k\}) = \binom{n}{k}.$$

Donc la relation $(*)$ devient

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}.$$

Troisième façon. En bonus, voici encore une autre approche. Considérons une variable aléatoire réelle discrète Z telle que $Z \hookrightarrow \mathscr{B}(n, \frac{1}{2})$. On a $Z(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et pour tout $k \in [\![0,n]\!]$,

$$\mathbf{P}(Z = k) = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \binom{n}{k}.$$

Alors, sachant que les évènements $(B = k)$ sont incompatibles,

$$\begin{aligned} 1 = \mathbf{P}(Z \in [\![0,n]\!]) &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} (Z = k)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \mathbf{P}(Z = k) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}, \end{aligned}$$

où l'on retrouve le résultat.

2. Dans l'énoncé, on donne la loi du couple (X,Y). On a $(X,Y)(\Omega) = [\![1, n+1]\!]^2$, donc, sachant que les évènements élémentaires sont incompatibles,

$$\begin{aligned} 1 &= \mathbf{P}((X,Y) \in [\![1,n+1]\!]^2) \\ &= \mathbf{P}\left(\bigcup_{(i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2} (X,Y) = (i,j)\right) \\ &= \sum_{(i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2} \mathbf{P}((X,Y) = (i,j)) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \mathbf{P}(X = i, Y = j) \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1} \\ &= \alpha \left(\sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1}\right) \left(\sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1}\right) \\ &= \alpha \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\right) \left(\sum_{j=0}^{n+1} \binom{n}{j}\right) \\ &= \alpha \cdot 2^n \cdot 2^n, \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{d'où } \alpha = \frac{1}{4^n}.}$$

3. Soit $i \in X(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$. D'après le cours,

$$\begin{aligned} \boxed{\mathbf{P}(X = i)} &= \sum_{j=1}^{n+1} \mathbf{P}(X = i, Y = j) \\ &= \frac{1}{4^n} \binom{n}{i-1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} \\ &= \frac{1}{4^n} 2^n \binom{n}{i-1} = \boxed{\frac{1}{2^n} \binom{n}{i-1}.} \end{aligned}$$

Par un procédé analogue, pour tout $j \in [\![1, n+1]\!]$,

$$\mathbf{P}(Y = j) = \frac{1}{2^n}\binom{n}{j-1}.$$

Où l'on voit que pour tout $(i, j) \in [\![1, n+1]\!]^2$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(X = i, Y = j) &= \frac{1}{4^n}\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1} \\ &= \left(\frac{1}{2^n}\binom{n}{i-1}\right)\left(\frac{1}{2^n}\binom{n}{j-1}\right) \\ &= \mathbf{P}(X = i)\mathbf{P}(Y = j),\end{aligned}$$

ce qui signifie que X et Y sont indépendantes.

4. Soit $Z = X - 1$. On a $Z(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(Z = k) &= \mathbf{P}(X - 1 = k) = \mathbf{P}(X = k+1) \\ &= \frac{1}{2^n}\binom{n}{k+1-1} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}.\end{aligned}$$

Donc $Z \hookrightarrow \mathscr{B}(n, \frac{1}{2})$.

D'après le cours,

$$E(Z) = \frac{n}{2} \text{ et } V(Z) = n\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{n}{4}.$$

Donc puisque $X = Z + 1$, par linéarité de l'espérance,

$$E(X) = E(Z+1) = E(Z) + 1 = \frac{n}{2} + 1,$$

et par propriétés de la variance,

$$V(X) = V(Z+1) = V(Z) = \frac{n}{4}.$$

5. Voici deux approches. Dans chacune, on compte de deux manières différentes.

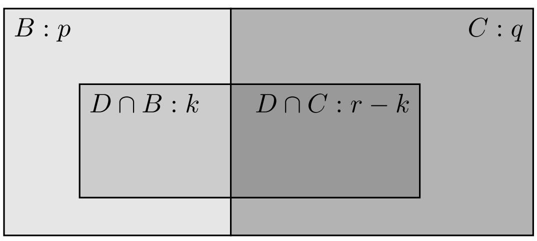
Dénombrements. Considérons une partie fixe $B \subset A$ de cardinal p, et posons $C = A \setminus B$. Alors,

$$\operatorname{card}(C) = \operatorname{card}(A) - \operatorname{card}(B) = q.$$

$*$ Considérons maintenant une partie quelconque D de A de cardinal r : le nombre de telles parties est

$$\binom{p+q}{r}.$$

$*$ On peut aussi dénombrer les parties D en considérant leur intersection avec B : posons $k = \operatorname{card}(D \cap B)$. Comme $A = B \sqcup C$, on a $D = (D \cap B) \sqcup (D \cap C)$, donc $\operatorname{card}(D \cap C) = r - k$. La figure suivante illustre cette situation. Chaque partie de A est étiquetée sous la forme « Nom : cardinal ».



Pour décrire toutes les parties D, il suffit donc de compter le nombre de possibilités pour $D \cap B$ et pour $D \cap C$: il y a $\binom{p}{k}$ possibilités pour $D \cap B$ et $\binom{q}{r-k}$ possibilités pour $D \cap C$, ce qui donne $\binom{p}{k}\binom{q}{r-k}$ possibilités pour D, sachant qu'elle compte k éléments dans B et $r - k$ dans C. Enfin, comme $D \cap B \subset B$, $k \leqslant r$, donc le nombre de parties $D \subset A$ ayant r éléments est

$$\sum_{k=0}^{r}\binom{p}{k}\binom{q}{r-k}.$$

$*$ Alors, en comparant ces deux dénombrements,

$$\binom{p+q}{r} = \sum_{k=0}^{r}\binom{p}{k}\binom{q}{r-k}.$$

Naturellement, les coefficients binomiaux sont nuls si le terme du bas est strictement supérieur à celui du haut.

Commentaire. C'est vraisemblablement la démarche qu'attendait l'énoncé.

Binômes de Newton. Soit $x \in \mathbb{R}$.

$*$ Développons une première fois :

$$(1+x)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q}\binom{p+q}{k}x^k.$$

Dans cette somme, le coefficient de x^r est clairement

$$\binom{p+q}{r}.$$

$*$ Par ailleurs, développons une seconde fois :

$$\begin{aligned}(1+x)^{p+q} &= (1+x)^p(1+x)^q \\ &= \left(\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{q}\binom{q}{k}x^k\right).\end{aligned}$$

Grâce à un produit de Cauchy, qui ne pose aucun problème ici puisque les sommes sont finies, et avec toujours la convention de nullité éventuelle des coefficients binomiaux,

$$(1+x)^{p+q} = \sum_{k=0}^{p+q}\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{p}{j}\binom{q}{k-j}\right)x^k.$$

Dans cette nouvelle somme, le coefficient de x^r est

$$\sum_{j=0}^{r}\binom{p}{j}\binom{q}{r-j}.$$

$*$ Par unicité dudit coefficient, on obtient l'égalité voulue :

$$\binom{p+q}{r} = \sum_{j=0}^{r}\binom{p}{j}\binom{q}{r-j}.$$

Commentaire. Il me semble que cette seconde approche est plus aisée. Et je veux croire qu'elle aurait été acceptée au concours.

6. En faisant $p = q = r = n$ dans l'égalité précédente,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \binom{2n}{n}.$$

Et comme $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

7.1. Par définition, pour tout $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]^2$,

$$b_{ij} = \mathbf{P}(X = i, Y = j) = \frac{1}{4^n}\binom{n}{i-1}\binom{n}{j-1}.$$

En particulier, la colonne j de B est

$$C_j(B) = \frac{1}{4^n}\binom{n}{j-1}\begin{pmatrix}\binom{n}{0}\\ \binom{n}{1}\\ \vdots\\ \binom{n}{n}\end{pmatrix}.$$

Où l'on voit que toutes les colonnes de B sont proportionnelles à une même colonne non nulle,

donc $\mathrm{rg}(B) = 1$.

7.2. Pour finir,

$$\mathrm{Tr}(B) = \frac{1}{4^n}\sum_{i=1}^{n+1}\binom{n}{i-1}^2 = \frac{1}{4^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}.$$

Exercice 3

1.1. L'espace des matrices symétriques

$$\mathscr{S}_2 = \left\{\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix} \mid (a,b,c) \in \mathbb{R}^3\right\}$$

est clairement de dimension 3. De plus toute matrice symétrique réelle est diagonalisable.

Donc $\mathscr{S}_2$ convient.

1.2. Ainsi, $\mathscr{D}_2$ contient au moins un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2$ de dimension 3.

Par ailleurs, un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2$ de dimension 4 est $\mathscr{M}_2$ lui-même. Mais $\mathscr{D}_2 \subsetneq \mathscr{M}_2$, car il existe des matrices de $\mathscr{M}_2$ non diagonalisables, par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Ainsi, la plus grande dimension des sous-espaces vectoriels de $\mathscr{M}_2$ inclus dans $\mathscr{D}_2$ est 3.

1.3. Non.

En effet, s'il l'était, il serait de dimension 3 d'après la question précédente. Or $\mathscr{S}_2$ est déjà un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2$ de dimension 3 inclus dans $\mathscr{D}_2$. Donc on aurait $\mathscr{D}_2 = \mathscr{S}_2$, ce qui n'est pas, car il existe bien-sûr des matrices diagonalisables non symétriques, par exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}.$$

1.4. Soit un sous-espace vectoriel G de $\mathscr{M}_2$ contenant $\mathscr{D}_2$. Alors $\mathscr{S}_2 \subset G$. Et la matrice précédente, nommons-la A, est aussi dans G. Donc G contient $\mathscr{S}_2 \oplus \mathbb{R}A$. Or $\mathscr{S}_2$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_2$, puisqu'il est de dimension 3. Et $A \notin \mathscr{S}_2$. Donc $\mathscr{S}_2 \oplus \mathbb{R}A = \mathscr{M}_2$ et $\mathscr{M}_2 \subset G$. D'où $G = \mathscr{M}_2$.

Le seul sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_2$ contenant $\mathscr{D}_2$ est $\mathscr{M}_2$ lui-même.

1.5.1. Considérons l'application

$$\varphi \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_2 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ M = \begin{pmatrix} a & c\\ b & d\end{pmatrix} & \longmapsto & \varphi(M) = (a-d)^2 + 4bc.\end{array}\right.$$

C'est clairement un polynôme de degré 2 en les coordonnées des matrices, donc elle est continue sur $\mathscr{M}_2$, considéré comme une espace vectoriel normé. La norme choisie n'a pas d'importance, car $\mathscr{M}_2$ est de dimension finie.

Alors, les ensembles donnés s'écrivent

$$\Omega = \{M \in \mathscr{M}_2 \mid \varphi(M) > 0\}$$
$$F = \{M \in \mathscr{M}_2 \mid \varphi(M) \geqslant 0\}.$$

Comme φ est continue, d'après le cours,

Ω est ouvert et F est fermé.

1.5.2. Soit $M \in \mathscr{M}_2$. Son polynôme caractéristique s'écrit

$$\begin{aligned}\chi_M &= X^2 - \mathrm{Tr}(M)\,X + \det(M)\\ &= X^2 - (a+d)\,X + (ad - bc),\end{aligned}$$

dont le discriminant est

$$\Delta = (a+d)^2 - 4(ad - bc) = (a-d)^2 + 4bc = \varphi(M).$$

Si $M \in \Omega$, $\Delta > 0$ donc χ_M admet deux racines distinctes, donc M est diagonalisable et $M \in \mathscr{D}_2$.

Si $M \in \mathscr{D}_2$, χ_M doit être scindé, donc $\Delta \geqslant 0$ et $M \in F$.

On a prouvé que $\Omega \subset \mathscr{D}_2 \subset F$.

1.5.3. $\mathscr{D}_2$ n'est pas fermé.

Montrons-le avec une suite. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1 + \frac{1}{n}\end{pmatrix}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M_n admet deux valeurs propres distinctes, 1 et $1 + \frac{1}{n}$, donc elle est diagonalisable : $M_n \in \mathscr{D}_2$. De plus, puisque les limites se prennent coefficient par coefficient étant donné que $\mathscr{M}_2$ est de dimension finie,

$$\lim_{n\to+\infty} M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix} = M.$$

Mais M admet 1 comme valeur propre double et n'est pas I_2, donc elle n'est pas diagonalisable : $M \notin \mathscr{D}_2$.

On vient d'exhiber une suite d'éléments de $\mathscr{D}_2$ qui converge vers un élément qui n'est pas dans $\mathscr{D}_2$: par caractérisations séquentielle des fermés, cela entraine que $\mathscr{D}_2$ n'est pas fermé.

$\mathscr{D}_2$ n'est pas ouvert.

Montrons-le aussi avec une suite. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$N_n = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{n}\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, N_n admet 0 comme valeur propre double et n'est pas la matrice nulle O_2, donc $N_n \notin \mathscr{D}_2$. Mais

$$\lim_{n\to+\infty} N_n = O_2 \in \mathscr{D}_2.$$

On vient d'exhiber une suite d'éléments du complémentaire $\mathscr{M}_2 \setminus \mathscr{D}_2$ qui converge vers un élément qui est dans $\mathscr{D}_2$, donc n'est pas dans $\mathscr{M}_2 \setminus \mathscr{D}_2$. Cela signifie que $\mathscr{M}_2 \setminus \mathscr{D}_2$ n'est pas fermé, donc $\mathscr{D}_2$ n'est pas ouvert.

2.1.1. Traitons le cas de la matrice A. Celui de la matrice B se traite de la même façon.

A est triangulaire supérieure donc ses valeurs propres sont ses éléments diagonaux : 1, -1 et 0.

Comme 1 n'apparait qu'une fois, sa multiplicité est $m(1) = 1$. Alors la dimension de son sous-espace propre associé $E_1(A)$ vérifie $1 \leqslant \dim(E_1(A)) \leqslant m(1)$, d'où $\dim(E_1(A)) = 1$.

De même, -1 est valeur propre simple de A et $\dim(E_{-1}(A)) = 1$.

Enfin, 0 est valeur propre d'ordre $m(0) = n-2$, donc $1 \leqslant \dim(E_0(A)) \leqslant m(0) = n-2$. Or les $n-2$ dernières colonnes de A sont nulles, donc $\mathrm{rg}(A) \leqslant 2$ d'où $\dim(E_0(A)) \geqslant n-2$ d'après le théorème du rang. Ainsi, $\dim(E_0(A)) = n-2$.

Finalement, la somme des dimensions des sous-espaces propres vaut n, donc A est diagonalisable.

De même, B l'est aussi.

2.1.2. On voit que $A+B$ est triangulaire supérieure stricte mais non nulle. Cela signifie qu'elle admet 0 comme valeur propre d'ordre n. Mais n'étant pas elle-même nulle, elle n'est pas diagonalisable. Ainsi, $A+B \notin \mathscr{D}_n$ et

$\mathscr{D}_n$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n$.

2.2. Soit $N \in \mathscr{A}_n$. Soit λ une éventuelle valeur propre réelle de N et soit $X \neq 0$ un vecteur propre associé. D'une part,

$$^t\!X\,N\,X = {}^t\!X\,(\lambda X) = \lambda\,{}^t\!X\,X = \lambda\|X\|^2.$$

D'autre part, comme $N = -\,{}^t\!N$,

$$\begin{aligned} {}^t\!X\,N\,X &= -\,{}^t\!X\,{}^t\!N\,X = -{}^t(N\,X)\,X \\ &= -{}^t(\lambda X)\,X = -\lambda\,{}^t\!X\,X = -\lambda\|X\|^2. \end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda\|X\|^2 = -\lambda\|X\|^2$. Or $X \neq 0$ donc $\|X\|^2 \neq 0$. Alors $\lambda = 0$.

Finalement, si N admet une valeur propre réelle, c'est forcément 0.

2.3. Soit S un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n$ tel que $S \subset \mathscr{D}_n$.

Soit $N \in S \cap \mathscr{A}_n$. D'une part, $N \in S \subset \mathscr{D}_n$ donc N est diagonalisable et toutes ses valeurs propres sont réelles. D'autre part, comme $N \in \mathscr{A}_n$, ces valeurs propres sont 0 d'après la question précédente. Donc N est semblable à la matrice nulle, c'est donc la matrice nulle.

Ainsi, $S \cap \mathscr{A}_n = \{0\}$.

2.4.1. Soit $M \in \mathrm{Ker}(f_P)$: $f_P(M) = 0$, c'est-à-dire $P^{-1}\,M\,P = 0$. Donc M est semblable à la matrice nulle, c'est la matrice nulle. Ainsi $\mathrm{Ker}(f_P) = \{0\}$ et l'endomorphisme f_P est injectif. Comme $\mathscr{M}_n$ est de dimension finie, f_P est aussi bijectif.

f_P est bien un automorphisme de $\mathscr{M}_n$.

Soit $M \in \mathscr{M}_n$. Posons $N = f_P(M)$. Alors $N = P^{-1}\,M\,P$, donc $M = P\,N\,P^{-1}$. Où l'on voit donc que $f_P^{-1}(N) = P\,N\,P^{-1} = f_{P^{-1}}(N)$. Comme c'est vrai pour tout M et que f_P est bijectif, c'est vrai pour tout N, donc $f_P^{-1} = f_{P^{-1}}$.

Comme f_P est une automorphisme,

$$\dim(\mathscr{S}_P) = \dim(f_P(\mathscr{S}_n)) = \dim(\mathscr{S}_n) = \frac{n\,(n+1)}{2}.$$

2.4.2. Par construction, toute matrice de $\mathscr{S}_P$ est semblable à une matrice de $\mathscr{S}_n$, laquelle est symétrique réelle donc diagonalisable, donc toute matrice de $\mathscr{S}_P$ est diagonalisable : $\mathscr{S}_P \subset \mathscr{D}_n$.

2.4.3. Avec ce qu'on vient de dire, on voit donc que

$$\bigcup_{P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} \mathscr{S}_P \subset \mathscr{D}_n.$$

Réciproquement, soit $M \in \mathscr{D}_n$. Elle est diagonalisable, donc il existe une matrice diagonale D et une matrice inversible P telles que $M = P\,D\,P^{-1} = f_{P^{-1}}(D)$. Comme D est diagonale, elle est symétrique donc $D \in \mathscr{S}_n$. Donc $M \in f_{P^{-1}}(\mathscr{S}_n) = \mathscr{S}_{P^{-1}}$. On aurait pu tout aussi bien dire qu'il existe Q inversible telle que $M = Q^{-1}\,D\,Q$, donc $M \in f_Q(\mathscr{S}_n) = \mathscr{S}_Q$. Ainsi,

$$\mathscr{D}_n \subset \bigcup_{Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} \mathscr{S}_Q.$$

Comme l'indice est muet, on en conclut que

$$\mathscr{D}_n = \bigcup_{P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})} \mathscr{S}_P.$$

2.5.1. Clairement, une base de $\mathscr{S}_n$ est

$\mathscr{B}_1 = \{E_{ii}, 1 \leqslant i \leqslant n\} \cup \{E_{ij} + E_{ji}, 1 \leqslant i < j \leqslant n\}$.

Commentaire. D'après le programme, les bases ne sont pas des ensembles, mais des familles, dans lesquelles l'ordre importe, contrairement aux ensembles où l'on décrit les éléments en vrac.

2.5.2. Soient deux indices tels que $1 \leqslant i < j \leqslant n$:

$$T_{ij} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} i & j \\ \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} & 1 \\ 4 & \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow i \\ \leftarrow j \end{array}$$

où tous les termes sont nuls, sauf ceux marqués ; et l'on a aussi indiqué les indices de lignes et de colonnes correspondants.

Comme suggéré, considérons l'endomorphisme φ canoniquement associé à T_{ij}. Nommons $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Par définition, $\varphi(e_i) = 4\,e_j$, $\varphi(e_j) = e_i$ et pour tout $k \notin \{i, j\}$, $\varphi(e_k) = 0$.

Considérons de même l'endomorphisme p canoniquement associé à P : $p(e_j) = 2\,e_j$ et pour tout $k \neq j$, $p(e_k) = e_k$. On a également $p^{-1}(e_j) = \frac{1}{2}\,e_j$ et $p^{-1}(e_k) = e_k$ si $k \neq j$.

Étudions $p^{-1} \circ \varphi \circ p$. On a

$$\begin{aligned} p^{-1} \circ \varphi \circ p(e_i) &= p^{-1} \circ \varphi(e_i) = p^{-1}(4\,e_j) = 2\,e_j, \\ p^{-1} \circ \varphi \circ p(e_j) &= p^{-1} \circ \varphi(2\,e_j) = p^{-1}(2\,e_i) = 2\,e_i, \end{aligned}$$

et pour tout $k \notin \{i, j\}$,

$$p^{-1} \circ \varphi \circ p(e_k) = p^{-1} \circ \varphi(e_k) = p^{-1}(0) = 0.$$

Ainsi, avec les mêmes conventions d'écriture que plus haut,

$$P^{-1}\,T_{ij}\,P = \begin{pmatrix} & 2 \\ 2 & \end{pmatrix} = 2\,(E_{ji} + E_{ij}).$$

Cette matrice est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable. Comme T_{ij} lui est semblable,

T_{ij} est diagonalisable.

2.5.3. Considérons la famille $(T_{ij}, i < j)$. Par définition, elle engendre $\mathscr{T}$. Montrons qu'elle est libre. Soient des réel α_{ij} avec $i < j$ tels que

$$0 = \sum_{i<j} \alpha_{ij} T_{ij} = 4 \sum_{i<j} \alpha_{ij} E_{ji} + \sum_{i<j} \alpha_{ij} E_{ij}.$$

Comme la famille (E_{ij}) est une base de $\mathscr{M}_n$, il s'ensuit que pour tout $i < j$, $\alpha_{ij} = 0$. Donc cette famille est libre. C'est donc une base de $\mathscr{T}$. En outre, elle contient $\frac{1}{2} n(n-1)$ éléments. Donc $\dim \mathscr{T} = \frac{1}{2} n(n-1)$.

Soit $M \in \mathscr{T} \cap \mathscr{S}_n$. D'une part ${}^tM = M$. D'autre part, il existe $(\alpha_{ij})_{i<j}$ tel que

$$M = \sum_{i<j} \alpha_{ij} T_{ij} = 4 \sum_{i<j} \alpha_{ij} E_{ji} + \sum_{i<j} \alpha_{ij} E_{ij}$$

Alors

$${}^tM = 4 \sum_{i<j} \alpha_{ij} E_{ij} + \sum_{i<j} \alpha_{ij} E_{ji}.$$

Comme la famille (E_{ij}) est une base de $\mathscr{M}_n$, on en déduit que pour tout $i < j$, $4\alpha_{ij} = \alpha_{ij}$, d'où $\alpha_{ij} = 0$. D'où $M = 0$ et $\mathscr{T} \cap \mathscr{S}_n = \{0\}$.

Pour finir, on voit que

$$\begin{aligned}\dim(\mathscr{T}) + \dim(\mathscr{S}_n) &= \frac{1}{2} n(n-1) + \frac{1}{2} n(n+1) \\ &= n^2 = \dim(\mathscr{M}_n),\end{aligned}$$

donc $\mathscr{M}_n = \mathscr{T} \oplus \mathscr{S}_n$.

Sans difficulté, en concaténant la base $(T_{ij}, i < j)$ de $\mathscr{T}$ et la base $\mathscr{B}_1$ de $\mathscr{S}_n$, on obtient une base de $\mathscr{M}_n$, constituée de matrices toutes diagonalisables.

2.5.4. Soit S un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n$ contenant $\mathscr{D}_n$. Il contient donc toutes les matrices de la base précédente, car elles sont toutes diagonalisables. Donc il contient $\mathscr{M}_n$. Donc $S = \mathscr{M}_n$.

Le seul sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n$ contenant $\mathscr{D}_n$ est $\mathscr{M}_n$ lui-même.

Exercice 4

1.

```
def maxi(L):
    n = len(L)
    m = 0
    for i in range(n):
        if L[i] > m:
            m = L[i]
    return m
```

2.

```
def ind(L):
    n = len(L)
    L1 = []
    for i in range(n):
        if L[i] != 0:
            L1.append(i)
    return L1
```

3.

```
def nb_oc(L):
    n = len(L)
    M = maxi(L) + 1
    T = [0]*M
    for i in range(n):
        T[L[i]] += 1
    return T
```

4.1. La liste `L` est parcourue une fois dans l'appel à `maxi`, ligne 3. Elle est parcourue une seconde fois dans la boucle, ligne 4. Ainsi, `nb_oc` parcourt la liste deux fois.

4.2. C'est déjà le cas.

5.1. Détaillons les étapes.

- `L0 = [2,0,4,1,3,3,2,3,1,1]`
- `T0 = [1,3,2,3,1]`, une fois 0, trois fois 1, deux fois 2, trois fois 3, une fois 4.
- `I0 = [0,1,2,3,4]`, tous les indices conviennent car 0 n'est pas dans `T0`.
- `L1 = [1,4,3,3,2,2,3,1,1,0]`

De même,

- `T1 = [1,3,2,3,1]`
- `I1 = [0,1,2,3,4]`
- `L1 = [1,4,3,3,2,2,3,1,1,0]`

Abrégeons. En comprenant l'énoncé, on voit que dans `L(n+1)` on compte en décroissant à partir de `maxi(Ln)`, le nombre d'occurrences de chaque nombre dans `Ln`.

- `L2 = [1,4,3,3,2,2,3,1,1,0]`
- `L3 = [1,4,3,3,2,2,3,1,1,0]`

Où l'on comprend évidemment que la suite est stationnaire. Par une récurrence évidente,

- si `Ln = [1,4,3,3,2,2,3,1,1,0]`,
- `Tn = [1,3,2,3,1]`
- `In = [0,1,2,3,4]`
- `L(n+1) = [1,4,3,3,2,2,3,1,1,0]`.

Donc `L2018 = [1,4,3,3,2,2,3,1,1,0]`.

5.2. Supposons que `L1 = B = [2,4,1,1,1,2]`. Les termes d'indices impairs, `[4,1,2]`, permettent de reconstruire `I0 = [2,1,4]`. Or, par définition, les termes de `I0` doivent croître strictement, ce qui n'est pas le cas ici. Donc ce `I0` est impossible, donc `B` ne peut pas être un `L1`, et aucun `L0` ne peut aboutir à `B`.

5.3. Supposons que `L1 = C = [2,4,1,0]`. Cela signifie que dans `L0`, on lit deux fois le 4, une fois le 0, que 4 est le maximum de `L0` et que les autres nombres entre 0 et 4 n'apparaissent pas dans `L0`. Alors, `L0` peut être l'une des listes suivantes : `[0, 4, 4]`, `[4, 0, 4]`, `[4, 4, 0]`.

5.4.

```
def rob(A, n):
    L = A[:] # copie locale de A
    for i in range(n):
        T = nb_oc(L)
        I = ind(T)
        I.reverse() # Variante : I = I[::-1]
        # L'ancienne valeur de L ne sert plus,
        # on l'écrase par la nouvelle valeur
        L = []
        for ik in I:
            L.append(T[ik])
            L.append(ik)
    return L
```