

# Corrigé du onzième devoir de révision

1. Soit  $x \in ]-1, 1[$ . On sait que

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = (1-x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/2}{n} (-x)^n.$$

Soit  $n \in \mathbf{N}$ .

$$\begin{aligned} \binom{-1/2}{n} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (-\frac{1}{2} - k)}{n!} \\ &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1} (-\frac{1}{2}(1+2k))}{n!} \cdot \frac{\prod_{k=1}^n (2k)}{\prod_{k=1}^n (2k)} \\ &= \left(-\frac{1}{2}\right)^n \frac{(2n)!}{n! 2^n n!} = \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n (n!)^2}. \end{aligned}$$

Donc, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^n} x^n.}$$

2. Soit  $x \in ]-1, 1[$ . On a  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ , d'où

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{(p+1)n} = f(x^{p+1}).$$

On sait que quand  $x \rightarrow 1^-$ ,  $\sqrt{1-x} f(x) \rightarrow \sqrt{\pi}$ , donc par composition des limites, sachant que  $x^{p+1} \rightarrow 1^-$ ,

$$\sqrt{1-x^{p+1}} f(x^{p+1}) \rightarrow \sqrt{\pi}.$$

Par ailleurs, toujours quand  $x \rightarrow 1^-$ ,

$$1 - x^{p+1} = (1-x) \sum_{k=0}^p x^k \sim (1-x)(p+1),$$

donc

$$\sqrt{1-x^{p+1}} f(x^{p+1}) \sim \sqrt{1-x} \sqrt{p+1} f(x^{p+1})$$

et

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} f(x^{p+1}) = \sqrt{\frac{\pi}{p+1}}.}$$

3. La fonction  $h_p : x \mapsto e^{-(p+1)t}/\sqrt{t}$  est continue sur  $]0, +\infty[$ .

De plus,  $|h_p(t)| \sim_{t \rightarrow 0^+} 1/\sqrt{t}$  où  $t \mapsto 1/\sqrt{t}$  est intégrable sur  $]0, 1[$ , donc  $h_p$  l'est aussi.

Enfin, pour  $t \geq 1$ ,  $1/\sqrt{t} \leq 1$  donc  $|h_p(t)| \leq e^{-t}$  où  $t \mapsto e^{-t}$  est intégrable sur  $[1, +\infty[$ , donc  $h_p$  aussi.

Ainsi,  $h_p$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$  et

l'intégrale converge.

Le changement de variable  $u = (p+1)t$  est bijectif et de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $]0, +\infty[$  dans lui-même. Donc, sachant que la première intégrale converge, on peut écrire

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} dt &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u/(p+1)}} \frac{du}{p+1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{p+1}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \sqrt{\frac{\pi}{p+1}}. \end{aligned}$$

Grâce à la question précédente,

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} f(x^{p+1}) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} dt.}$$

4. Soit un polynôme  $Q$ .

Si  $Q = 0$ , l'égalité voulue est évidente.

Si  $Q \neq 0$ , en notant  $q = \deg Q$ , on peut écrire

$$Q = \sum_{p=0}^q b_p X^p.$$

Soit  $x \in ]-1, 1[$ . On a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k Q(x^k) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \sum_{p=0}^q b_p x^{(p+1)k} \\ &= \sum_{p=0}^q b_p \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{(p+1)k} \end{aligned}$$

car la somme sur  $p$  est finie. Alors,

$$\begin{aligned} &\boxed{\sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k Q(x^k)} \\ &= \sum_{p=0}^q b_p \left( \sqrt{1-x} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{(p+1)k} \right) \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow 1^-} \sum_{p=0}^q b_p \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(p+1)t}}{\sqrt{t}} dt$$

$\uparrow$   
comme somme finie de limites, et avec la question 3

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \left( \sum_{p=0}^q b_p e^{-pt} \right) dt$$

$\uparrow$   
toujours parce que la somme est finie, et par linéarité de l'intégrale

$$= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} Q(e^{-t}) dt.$$

5. La fonction  $h$  est continue par morceaux sur  $[0, 1]$ , car elle est continue sur  $[0, e^{-1}[$  et  $[e^{-1}, 1]$ , et elle admet des limites finies à droite et à gauche en  $e^{-1}$ . Donc la fonction  $\varphi : t \mapsto e^{-t} h(e^{-t})/\sqrt{t}$  est continue par morceaux sur  $]0, +\infty[$ .

Soit  $t \in ]0, 1]$  : alors  $e^{-t} \in [e^{-1}, 1[$ ,

$$\varphi(t) = \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} \frac{1}{e^{-t}} = \frac{1}{\sqrt{t}},$$

et  $\varphi$  est intégrable sur  $]0, 1[$ .

Soit  $t \in [1, +\infty[$  :  $e^{-t} \leq e^{-1}$  donc

$$\varphi(t) = \begin{cases} e^{-1} & \text{si } t = 1, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et  $\varphi$  est intégrable sur  $]1, +\infty[$ .

Donc  $\varphi$  est intégrable sur  $]0, +\infty[$ . De plus,

$$\boxed{\int_0^{+\infty} \varphi(t) dt = \int_0^1 \varphi(t) dt = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}} = \left[ 2\sqrt{t} \right]_0^1 = 2.}$$

6. Soit  $x \in [0, 1[$ . Comme  $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = 0$ , il existe un rang à partir duquel  $x^k \in [0, e^{-1}[$ , donc  $h(x^k) = 0$ . Autrement dit, la suite  $(a_k x^k h(x^k))_{k \in \mathbf{N}}$  est nulle à partir d'un certain rang, donc  $\boxed{\sum a_k x^k h(x^k)}$  converge.

7. Posons  $x_n = e^{-1/n}$  pour  $n \geq 1$ . Comme  $x_n \rightarrow 1$ , en utilisant l'égalité de Karamata et par composition des limites, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1-x_n} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_n^k h(x_n^k) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} h(e^{-t}) dt = 2.$$

Par ailleurs, pour  $k > n$ ,  $x_n^k = e^{-k/n} < e^{-1}$  donc  $h(x_n^k) = 0$ . Alors

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x_n^k h(x_n^k) = \sum_{k=0}^n a_k x_n^k \frac{1}{x_n^k} = \sum_{k=0}^n a_k.$$

En outre, quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $1 - x_n = 1 - e^{-1/n} \sim \frac{1}{n}$  donc

$$\sqrt{1-x_n} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x_n^k h(x_n^k) \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^n a_k.$$

Il s'ensuit que  $\sum_{k=0}^n a_k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2\sqrt{n}$ .

8. Comme  $0 < \alpha < 1 < \beta$ ,  $0 < \alpha n < n < \beta n$  donc  $0 \leq [\alpha n] \leq n \leq [\beta n]$  par croissance de la fonction partie entière. Par hypothèse,  $n - [\alpha n]$  et  $n - [\beta n]$  sont non nuls, donc  $[\alpha n] < n < [\beta n]$ .

Comme la suite  $(a_k)$  décroît, pour tout  $k \leq n$ ,  $a_k \geq a_n$  donc

$$S_n - S_{[\alpha n]} = \sum_{k=[\alpha n]+1}^n a_k \geq \sum_{k=[\alpha n]+1}^n a_n = a_n (n - [\alpha n])$$

et

$$\frac{S_n - S_{[\alpha n]}}{n - [\alpha n]} \geq a_n.$$

De même,

$$S_{[\beta n]} - S_n = \sum_{k=n+1}^{[\beta n]} a_k \leq \sum_{k=n+1}^{[\beta n]} a_n = a_n ([\beta n] - n)$$

et

$$\frac{S_{[\beta n]} - S_n}{[\beta n] - n} \leq a_n.$$

9. Soit  $\gamma > 0$ .

On sait que quand  $x \rightarrow +\infty$ ,  $[x] \sim x$ . De plus, quand  $n \rightarrow \infty$ ,  $\gamma n \rightarrow \infty$ , donc par composition,  $[\gamma n] \sim \gamma n$  et

$$\frac{n}{[\gamma n]} \sim \frac{n}{\gamma n} = \frac{1}{\gamma}.$$

En outre  $[\gamma n] \rightarrow \infty$  et d'après l'énoncé,  $S_{[\gamma n]} \sim 2\sqrt{[\gamma n]}$ . Donc

$$\frac{S_{[\gamma n]}}{\sqrt{n}} \sim \frac{2\sqrt{[\gamma n]}}{\sqrt{n}} \sim \frac{2\sqrt{\gamma n}}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{\gamma}.$$

10. Soient  $\varepsilon > 0$  et  $n \in \mathbf{N}$ . Avec l'encadrement de la question 8,

$$\sqrt{n} \frac{S_{[\beta n]} - S_n}{[\beta n] - n} \leq \sqrt{n} a_n \leq \sqrt{n} \frac{S_n - S_{[\alpha n]}}{n - [\alpha n]}.$$

Traisons séparément chaque extrémités de ce nouvel encadrement.

D'une part,

$$\sqrt{n} \frac{S_n - S_{[\alpha n]}}{n - [\alpha n]} = \frac{S_n - S_{[\alpha n]}}{\sqrt{n} \left(1 - \frac{[\alpha n]}{n}\right)}.$$

Avec la première limite de la question précédente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \frac{[\alpha n]}{n} = \alpha.$$

Avec l'hypothèse de l'énoncé,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{n}} = 2.$$

Et avec la seconde limite de la question précédente,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_{[\alpha n]}}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{\alpha}.$$

Par opérations sur les limites, on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \frac{S_n - S_{[\alpha n]}}{n - [\alpha n]} = \frac{2 - 2\sqrt{\alpha}}{1 - \alpha} = \frac{2}{1 + \sqrt{\alpha}}.$$

Donc il existe un rang  $N_1$  tel que pour tout  $n \geq N_1$ ,

$$\sqrt{n} \frac{S_n - S_{[\alpha n]}}{n - [\alpha n]} \leq \frac{2}{1 + \sqrt{\alpha}} + \varepsilon.$$

D'autre part, selon un procédé analogue, il existe un rang  $N_2$  tel que pour tout  $n \geq N_2$ ,

$$\sqrt{n} \frac{S_{[\beta n]} - S_n}{[\beta n] - n} \geq \frac{2}{1 + \sqrt{\beta}} - \varepsilon.$$

Pour finir, en revenant à l'encadrement du début de question et en posant  $N = \max(N_1, N_2)$ , pour tout  $n \geq N$ ,

$$\frac{2}{1 + \sqrt{\beta}} - \varepsilon \leq \sqrt{n} a_n \leq \frac{2}{1 + \sqrt{\alpha}} + \varepsilon.$$

11. On voit que

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{2}{1 + \sqrt{\alpha}} = 1.$$

Donc il existe  $\alpha < 1$  tel que

$$\frac{2}{1 + \sqrt{\alpha}} \leq 1 + \varepsilon.$$

De même,

$$\lim_{\beta \rightarrow 1^+} \frac{2}{1 + \sqrt{\beta}} = 1,$$

donc il existe  $\beta > 1$  tel que

$$\frac{2}{1 + \sqrt{\beta}} \geq 1 - \varepsilon.$$

Avec ces  $\alpha$  et  $\beta$  fixés et avec l'encadrement de la question précédente, pour  $n$  assez grand on a

$$1 - 2\varepsilon \leq \sqrt{n} a_n \leq 1 + 2\varepsilon.$$

Cela signifie que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} a_n = 1$ .

12. On a

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(X_{k+1} = i_1, \dots, X_n = i_{n-k}) \\ &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n-k} \{X_{k+j} = i_j\}\right) \quad \text{par définition} \\ &= \prod_{j=1}^{n-k} \mathbf{P}(X_{k+j} = i_j) \quad \text{car les } X_i \text{ sont} \\ & \quad \text{indépendantes} \\ &= \prod_{j=1}^{n-k} \mathbf{P}(X_j = i_j) \quad \text{car les } X_i \text{ ont} \\ & \quad \text{la même loi} \\ &= \mathbf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n-k} \{X_j = i_j\}\right) \quad \text{à nouveau par} \\ & \quad \text{indépendance} \\ &= \mathbf{P}(X_1 = i_1, \dots, X_{n-k} = i_{n-k}). \end{aligned}$$

13. On a

$$\begin{aligned}
 & \underline{\mathbf{P}(S_{k+1} - S_k = j_1, \dots, S_n - S_k = j_{n-k})} \\
 &= \mathbf{P}(X_{k+1} = j_1, X_{k+1} + X_{k+2} = j_2, \dots, \\
 &\quad X_{k+1} + \dots + X_n = j_{n-k}) \\
 &= \mathbf{P}(X_{k+1} = j_1, X_{k+2} = j_2 - j_1, \dots, \\
 &\quad X_n = j_{n-k} - j_{n-k-1}) \\
 &= \mathbf{P}(X_1 = j_1, X_2 = j_2 - j_1, \dots, \\
 &\quad X_{n-k} = j_{n-k} - j_{n-k-1}) \\
 &\quad \text{d'après la question précédente} \\
 &= \mathbf{P}(X_1 = j_1, X_1 + X_2 = j_2, \dots, \\
 &\quad X_1 + \dots + X_{n-k} = j_{n-k}) \\
 &= \underline{\mathbf{P}(S_1 = j_1, S_2 = j_2, \dots, S_{n-k} = j_{n-k})}.
 \end{aligned}$$

14. Par définition de  $T$ ,  $T \geq 1 > 0$  donc  $E_0 = \Omega$ . Or  $A_n^n = \{S_n = 0\}$  donc

$$\underline{\mathbf{P}(A_n^n) = \mathbf{P}(S_n = 0) = \mathbf{P}(S_n = 0)\mathbf{P}(E_0)}.$$

Soit  $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ . Comme

$$A_k^n = \{S_k = 0\} \cap \left( \bigcap_{i=k+1}^n \{S_i \neq 0\} \right),$$

on a

$$\mathbf{P}(A_k^n) = \mathbf{P}(S_k = 0) \mathbf{P}\left( \bigcap_{i=k+1}^n \{S_i \neq 0\} \mid \{S_k = 0\} \right).$$

Puisque  $S_k = 0$  dans cette probabilité conditionnelle,

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}\left( \bigcap_{i=k+1}^n \{S_i \neq 0\} \mid \{S_k = 0\} \right) \\
 &= \mathbf{P}\left( \bigcap_{i=k+1}^n \{S_i - S_k \neq 0\} \mid \{S_k = 0\} \right).
 \end{aligned}$$

De plus, pour tout  $i \in \llbracket k+1, n \rrbracket$ ,  $S_k = X_1 + \dots + X_k$  et  $S_i - S_k = X_{k+1} + \dots + X_i$ . Ainsi,  $S_i - S_k$  ne dépend que des  $X_j$  pour  $j \geq k+1$  et  $S_k$  ne dépend que des  $X_j$  pour  $j \leq k$ . Donc les  $S_i - S_k$  et  $S_k$  sont indépendantes. Alors

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{P}\left( \bigcap_{i=k+1}^n \{S_i - S_k \neq 0\} \mid \{S_k = 0\} \right) \\
 &= \mathbf{P}\left( \bigcap_{i=k+1}^n \{S_i - S_k \neq 0\} \right) \\
 &= \mathbf{P}\left( \bigcap_{i=k+1}^n \{S_i \neq 0\} \right) \text{ d'après la question 13.}
 \end{aligned}$$

Mais par construction,  $\bigcap_{i=k+1}^n \{S_i \neq 0\} = E_{n-k}$ . Ainsi,

$$\underline{\mathbf{P}(A_k^n) = \mathbf{P}(S_k = 0)\mathbf{P}(E_{n-k})}.$$

15. Montrons que la famille  $(A_k^n)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  constitue un système complet d'événements. Si tel est le cas,

$$\sum_{k=0}^n \mathbf{P}(A_k^n) = 1,$$

ou encore, grâce à la question 14,

$$\underline{\sum_{k=0}^n \mathbf{P}(S_k = 0)\mathbf{P}(E_{n-k}) = 1}.$$

Montrer que  $(A_k^n)_{k \in \llbracket 0, n \rrbracket}$  constitue un système complet d'événements signifie que  $\Omega = \bigcup_{k=0}^n A_k^n$  et que pour tout  $i \neq j$ ,  $A_i^n \cap A_j^n = \emptyset$ . Autrement dit, cela signifie que tout  $\omega \in \Omega$  appartient à l'un des  $A_k^n$ , et un seul.

Soit  $\omega \in \Omega$ . Considérons l'ensemble

$$\{i \in \llbracket 0, n \rrbracket, S_i(\omega) = 0\}.$$

Comme  $S_0(\omega) = 0$ , il est non vide. À l'évidence, il est majoré par  $n$ . Alors il admet un plus grand élément : notons-le  $k$ .

Soit  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Dire que  $\omega \in A_j^n$  signifie que  $S_j(\omega) = 0$  et pour tout  $i > j$ ,  $S_i(\omega) \neq 0$ .

Par construction, c'est le cas pour  $j = k$ , car  $S_k(\omega) = 0$  et pour tout  $i > k$ ,  $S_i(\omega) \neq 0$ .

Supposons  $j \neq k$ . Si  $j < k$ ,  $S_k(\omega) = 0$  avec  $k > j$  donc  $\omega \notin A_j^n$ . Et si  $j > k$ ,  $S_j(\omega) = 0$  donc également  $\omega \notin A_j^n$ .

Ainsi, on a bien prouvé que  $\omega$  est dans un unique  $A_k^n$ .

16. D'abord, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,  $0 \leq \mathbf{P}(S_n = 0) \leq 1$  et  $0 \leq \mathbf{P}(E_n) \leq 1$  puisque ce sont des probabilités, donc en nommant  $R_S$  et  $R_E$  les rayons de convergence des séries entières  $\sum \mathbf{P}(S_n = 0)x^n$  et  $\sum \mathbf{P}(E_n)x^n$ ,  $R_S \geq 1$  et  $R_E \geq 1$ .

Ensuite, considérons le produit de Cauchy

$$\sum \left( \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(S_k = 0)\mathbf{P}(E_{n-k}) \right) x^n$$

des deux séries entières précédentes, de rayon de convergence  $R_C$ . D'après le cours,  $R_C \geq \min(R_S, R_E)$  donc  $R_C \geq 1$ . De plus, pour tout  $|x| < \min(R_S, R_E)$ , donc en particulier pour tout  $x \in ]0, 1[$ ,

$$\begin{aligned}
 & \frac{\left( \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_n = 0)x^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(E_n)x^n \right)}{\sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n \mathbf{P}(S_k = 0)\mathbf{P}(E_{n-k}) \right) x^n} \\
 &= 1 \text{ d'après la question 15} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.
 \end{aligned}$$

17. Soient  $n \in \mathbf{N}$  et  $\omega \in \Omega$ . On a

$$S_n(\omega) = \sum_{i=1}^n X_i(\omega).$$

Regroupons les  $X_i(\omega)$  qui valent 1 et ceux qui valent  $-1$ . Pour cela, introduisons les ensembles

$$I = \{i \in \llbracket 0, n \rrbracket, X_i(\omega) = 1\}$$

$$\text{et } J = \{i \in \llbracket 0, n \rrbracket, X_i(\omega) = -1\}.$$

Par construction,  $\llbracket 0, n \rrbracket = I \cup J$ , où la réunion est disjointe, et

$$\begin{aligned}
 S_n(\omega) &= \sum_{i \in I} X_i(\omega) + \sum_{i \in J} X_i(\omega) \\
 &= \sum_{i \in I} 1 + \sum_{i \in J} (-1) = \text{card } I - \text{card } J.
 \end{aligned}$$

Alors,

$$S_n(\omega) = 0 \iff \text{card } I = \text{card } J \implies n \in 2\mathbf{N}.$$

Donc si  $n \in 2\mathbf{N} + 1$ ,  $S_n(\omega) \neq 0$ . Ainsi,

$$\underline{\text{pour tout } p \in \mathbf{N}, \mathbf{P}(S_{2p+1} = 0) = 0}.$$

Soit  $p \in \mathbf{N}$ . L'évènement  $\{S_{2p} = 0\}$  s'écrit aussi

$$\bigcup_{\substack{I \subset \llbracket 1, 2p \rrbracket \\ \text{card } I = p}} \left( \left( \bigcap_{i \in I} \{X_i = 1\} \right) \cap \left( \bigcap_{i \notin I} \{X_i = -1\} \right) \right).$$

Comme cette réunion est disjointe et que les  $X_i$  sont indépendantes,

$$\begin{aligned} & \underline{\mathbf{P}(S_{2p} = 0)} \\ &= \sum_{\substack{I \subset \llbracket 1, 2p \rrbracket \\ \text{card } I = p}} \left( \left( \prod_{i \in I} \mathbf{P}(X_i = 1) \right) \times \left( \prod_{i \notin I} \mathbf{P}(X_i = -1) \right) \right) \\ &= \binom{2p}{p} \frac{1}{2^p} \frac{1}{2^p} = \frac{1}{4^p} \binom{2p}{p}. \end{aligned}$$

18. D'après la question 1, pour tout  $x \in ]0, 1[$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_n = 0) x^n &= \sum_{p=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_{2p} = 0) x^{2p} \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{4^p} \binom{2p}{p} x^{2p} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Alors d'après la question 16,

$$\begin{aligned} \underline{\sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(E_n) x^n} &= \frac{1}{1-x} \bigg/ \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(S_n = 0) x^n \\ &= \frac{1}{1-x} \sqrt{1-x^2} = \underline{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}}. \end{aligned}$$

19. Posons, pour  $n \in \mathbf{N}$ ,  $a_n = \mathbf{P}(E_n)$  et pour  $x \in ]0, 1[$ ,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

On voit que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} f(x) = \sqrt{2}$ .

Pour utiliser la partie B, modifions  $f$  en

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$

de sorte que  $\lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{1-x} f(x) = \sqrt{\pi}$ . Alors, d'après la question 7,

$$\sum_{k=0}^n a_k \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 2\sqrt{n}.$$

Puisque la suite des évènements  $\{T > n\}$  décroît clairement, la suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  aussi. Alors, la partie C s'applique, d'où l'on tire que

$$a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Avec la modification de  $f$ , cela signifie que

$$\underline{\mathbf{P}(E_n)} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{n\pi}}.$$

20. Clairement,  $\{T = +\infty\} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \{T > n\}$ . Comme la suite des évènements  $\{T > n\}$  décroît, d'après le théorème de la continuité décroissante,

$$\underline{\mathbf{P}(T = +\infty)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(T > n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}(E_n) = \underline{0},$$

grâce à l'équivalent précédent.

21. Pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,  $\{T > n-1\} = \{T = n\} \cup \{T > n\}$ , et cette union est disjointe, d'où  $\mathbf{P}(T > n-1) = \mathbf{P}(T = n) + \mathbf{P}(T > n)$ , ou encore  $\mathbf{P}(T = n) = \mathbf{P}(E_{n-1}) - \mathbf{P}(E_n)$ .

Ainsi, pour tout  $x \in ]0, 1[$ ,

$$\begin{aligned} \underline{\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(T = n) x^n} &= \sum_{n=1}^{\infty} (\mathbf{P}(E_{n-1}) - \mathbf{P}(E_n)) x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(E_{n-1}) x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(E_n) x^n \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(E_n) x^n - \left( \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}(E_n) x^n - 1 \right) \\ &= x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + 1 \\ &= 1 + (x-1) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \\ &= 1 - \sqrt{1-x} \sqrt{1+x} \\ &= \underline{1 - \sqrt{1-x^2}}. \end{aligned}$$

Bien-sûr, la propriété est encore vraie pour  $x = 0$  ( $0 = 0$ ); et pour  $x = 1$ , par propriété d'une loi de probabilité et sachant que  $\mathbf{P}(T = +\infty) = 0$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(T = n) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(T = n) + \mathbf{P}(T = +\infty) \\ &= \sum_{n \in T(\Omega)} \mathbf{P}(T = n) = 1. \end{aligned}$$

22. La fonction  $x \mapsto 1 - \sqrt{1-x^2}$  est paire donc son développement en série entière ne contient que des termes d'exposant pair. Alors, pour tout  $n \in \mathbf{N}$ ,

$$\mathbf{P}(T = 2n+1) = 0.$$

De plus, pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$1 - \sqrt{1-x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(T = 2n) x^{2n}.$$

En posant  $y = x^2$ , on a donc

$$1 - \sqrt{1-y} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{P}(T = 2n) y^n.$$

En dérivant par rapport à  $y$ , et avec la question 1,

$$\frac{d}{dy} (1 - \sqrt{1-y}) = \frac{1}{2\sqrt{1-y}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} y^n,$$

donc en intégrant, sachant que la fonction est nulle en 0,

$$\begin{aligned} 1 - \sqrt{1-y} &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} \frac{y^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4^{n-1}} \binom{2n-2}{n-1} \frac{y^n}{n}. \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, on en tire que pour tout  $n \in \mathbf{N}^*$ ,

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{P}(T = 2n)} &= \frac{1}{2} \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2} \frac{1}{4^{n-1} n} \\ &= \frac{1}{2 \cdot 4^{n-1} n} \frac{(2n-2)!}{((n-1)!)^2} \frac{(2n)(2n-1)}{(2n)(2n-1)} \\ &= \underline{\frac{1}{(2n-1)4^n} \binom{2n}{n}}. \end{aligned}$$