

# Douzième devoir de révision

[CS18]

4 heures

Calculatrices autorisées

Ce problème aborde la notion de moment dans différents contextes : moment d'une variable aléatoire réelle discrète à valeurs positives dans la partie I ; moment d'une suite numérique réelle dans la partie II ; moment d'une fonction dans la partie III.

## Notations

Si  $f$  est une fonction de classe  $C^\infty$  et  $p$  un entier naturel, on note  $f^{(p)}$  la dérivée  $p$ -ième de  $f$ .

On note  $\mathbb{C}[X]$  l'ensemble des polynômes à coefficients dans  $\mathbb{C}$ .

Si  $a$  et  $b$  sont deux entiers naturels,  $\llbracket a, b \rrbracket$  désigne l'ensemble des entiers compris entre  $a$  et  $b$ .

Si  $X$  est une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  admettant une espérance, celle-ci est notée  $\mathbb{E}(X)$ .

## Préambule

On admet le résultat suivant :

si  $(u_{p,q})_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$  est une famille de nombres réels telle que

i. pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , la série  $\sum_{q \geq 0} |u_{p,q}|$  converge,

ii. la série  $\sum_{p \geq 0} \left( \sum_{q=0}^{+\infty} |u_{p,q}| \right)$  converge,

alors, en notant  $S_p = \sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q}$  et, pour tout  $n$  entier

naturel,  $W_n = \sum_{\substack{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \\ p+q=n}} u_{p,q}$ ,

• pour tout  $q \in \mathbb{N}$ , la série  $\sum_{p \geq 0} u_{p,q}$  converge ; on

note  $S'_q$  sa somme ;

• les séries  $\sum_{p \geq 0} S_p$ ,  $\sum_{q \geq 0} S'_q$  et  $\sum_{n \geq 0} W_n$  convergent ;

•  $\sum_{p=0}^{+\infty} S_p = \sum_{q=0}^{+\infty} S'_q = \sum_{n=0}^{+\infty} W_n$ , c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \sum_{p=0}^{+\infty} \left( \sum_{q=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) &= \sum_{q=0}^{+\infty} \left( \sum_{p=0}^{+\infty} u_{p,q} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \sum_{\substack{(p,q) \in \mathbb{N}^2 \\ p+q=n}} u_{p,q} \right). \end{aligned}$$

## I Moments d'une variable aléatoire

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle discrète sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . On suppose que  $X(\Omega) \subset \mathbb{R}^{+*}$ .

Si  $p \in \mathbb{N}$ , on dit que  $X$  admet un moment d'ordre  $p$  si la variable aléatoire  $X^p$  admet une espérance. On note alors  $m_p(X)$ , appelé *moment d'ordre  $p$  de  $X$* , l'espérance de  $X^p$ .

On remarque que  $m_0(X) = 1$ .

**Q 1.** Justifier que  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $0 \leq X^k \leq 1 + X^n$ .

**Q 2.** En déduire que, si  $X$  admet un moment d'ordre  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ), alors  $X$  admet des moments d'ordre  $k$  pour tous  $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ .

### I.A – Fonction génératrice des moments

On suppose que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $X$  admet un moment d'ordre  $n$  et que la série entière  $\sum_{n \geq 0} m_n(X) \frac{t^n}{n!}$  admet un rayon de convergence  $R_X > 0$ .

Pour tout  $t \in ]-R_X, R_X[$ , on note  $M_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} m_n(X) \frac{t^n}{n!}$ . La fonction  $M_X$  s'appelle la *fonction génératrice* des moments de la variable aléatoire  $X$ .

**Q 3.** Justifier que la connaissance de la fonction  $M_X$  permet de déterminer de manière unique la suite  $(m_n(X))_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Q 4.** En utilisant les résultats du préambule, montrer que, pour tout  $t \in ]-R_X, R_X[$ , la variable aléatoire  $e^{tX}$  admet une espérance et que  $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$ .

**Q 5.** Montrer réciproquement que, s'il existe un réel  $R > 0$  tel que, pour tout  $t \in ]-R, R[$ , la variable aléatoire  $e^{tX}$  admet une espérance, alors l'ensemble de définition de la fonction génératrice des moments de  $X$  contient  $]-R, R[$  et pour tout  $t \in ]-R, R[$ ,  $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$ .

On suppose que  $X$  et  $Y$  sont deux variables aléatoires réelles discrètes indépendantes à valeurs strictement positives admettant des moments de tous ordres. On note  $R_X$  (respectivement  $R_Y$ ) le rayon de convergence (supposé strictement positif) associé à la fonction  $M_X$  (respectivement  $M_Y$ ).

**Q 6.** Montrer que la variable aléatoire  $X + Y$  admet des moments de tous ordres et que

$$\forall |t| < \min(R_X, R_Y), M_{X+Y}(t) = M_X(t) \times M_Y(t).$$

**I.B – Exemples**

$\lambda$  est un nombre réel fixé.

**I.B.1)** On suppose que  $Z$  est une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  suivant la loi de Poisson de paramètre  $\lambda$ .

**Q 7.** Montrer que  $Z$  admet des moments de tous ordres.

**Q 8.** Calculer la fonction génératrice des moments de  $Z$ . En déduire les valeurs de  $m_1(Z)$  et  $m_2(Z)$ .

**I.B.2)** Soit  $n$  un entier naturel non nul. Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $X_i$  est une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  suivant une loi de Bernoulli de paramètre  $\lambda/n$ . On suppose que  $X_1, X_2, \dots, X_n$  sont mutuellement indépendantes et on pose  $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ .

**Q 9.** Calculer la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire  $S_n$ .

**Q 10.** Pour  $t \in \mathbb{R}$ , calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_{S_n}(t)$ .

**Q 11.** Comparer avec les résultats de la question 8.

**I.B.3)** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $U_n$  est une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  suivant la loi uniforme sur  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . On pose  $Y_n = \frac{1}{n} U_n$ .

**Q 12.** Calculer la fonction génératrice des moments de la variable aléatoire  $Y_n$ .

**Q 13.** Pour  $t \in \mathbb{R}$ , calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} M_{Y_n}(t)$ .

**II Moments d'une suite numérique**

Si  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite réelle telle que, pour tout entier naturel  $p$ , la série  $\sum_{n \geq 0} n^p a_n$  converge absolument, on appelle moment d'ordre  $p$  de la suite  $(a_n)$

le nombre  $\sum_{n=0}^{+\infty} n^p a_n$ .

Le but de cette partie est de construire une suite non nulle dont tous les moments d'ordre  $p$  ( $p \in \mathbb{N}$ ) sont nuls.

**II.A – Étude d'une fonction**

On définit la fonction  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\begin{cases} \varphi(x) = \exp\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x}}\right) & \text{si } x < 1, \\ \varphi(x) = 0 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

**Q 14.** Montrer que  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ .

**Q 15.** Calculer  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \varphi'(x)$  et démontrer que  $\varphi$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Q 16.** Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $p$ , il existe deux polynômes  $P_p$  et  $Q_p$  à coefficients réels tels que, pour tout  $x \in ]-\infty, 1[$ ,

$$\varphi^{(p)}(x) = \frac{P_p(\sqrt{1-x})}{Q_p(\sqrt{1-x})} \exp\left(\frac{-x}{\sqrt{1-x}}\right).$$

**Q 17.** En déduire  $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \varphi^{(p)}(x)$  pour  $p \in \mathbb{N}^*$ .

**Q 18.** En déduire que  $\varphi$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  et pour  $p \in \mathbb{N}^*$ , donner la valeur de  $\varphi^{(p)}(1)$ .

**II.B – Développement en série**

**Q 19.** Démontrer, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$\varphi(x) = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(-1)^q}{q!} x^q (1-x)^{-q/2}.$$

On considère les polynômes de Hilbert

$$\begin{cases} H_0(X) = 1, \\ H_n(X) = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (X-k) \\ = \frac{X(X-1) \cdots (X-n+1)}{n!} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

**Q 20.** Démontrer que, pour tout  $x \in ]-1, 1[$  et tout  $q \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$(1-x)^{-q/2} = \sum_{p=0}^{+\infty} H_p\left(\frac{q}{2} + p - 1\right) x^p.$$

**Q 21.** En déduire

$$\forall x \in ]-1, 1[, \varphi(x) = 1 + \sum_{i=0}^{+\infty} \left( \sum_{j=0}^{+\infty} a_{i,j}(x) \right)$$

où l'on a posé

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, a_{i,j}(x) = \frac{(-1)^{i+1}}{(i+1)!} H_j\left(\frac{i-1}{2} + j\right) x^{i+j+1}.$$

**Q 22.** Démontrer que, pour tout  $x \in ]-1, 1[$ ,

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \left( \sum_{j=0}^{+\infty} |a_{i,j}(x)| \right) = \exp\left(\frac{|x|}{\sqrt{1-|x|}}\right) - 1.$$

**Q 23.** Utiliser les résultats admis dans le préambule pour établir l'égalité

$$\forall x \in ]-1, 1[, \varphi(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!} H_k\left(\frac{n+k}{2} - 1\right) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

**II.C – Un prolongement dans  $\mathbb{C}$** 

On note  $\mathcal{D}$  le disque ouvert unité de  $\mathbb{C}$  :

$$\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}.$$

**Q 24.** Montrer que, pour tout  $z \in \mathcal{D}$ , la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$  converge.

Pour  $z \in \mathcal{D}$ , on note  $\Phi_0(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$  et, sous réserve de convergence,

$$\Phi_p(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1) \cdots (n+1) a_{n+p} z^n.$$

**Q 25.** Justifier que, pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in ]-1, 1[$ ,  $\Phi_p(x) = \varphi^{(p)}(x)$  et que pour tout  $p \in \mathbb{N}^*$  et tout  $z \in \mathcal{D}$ , la série entière  $\sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1) \cdots (n+1) a_{n+p} z^n$  converge.

**Q 26.** Justifier que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , la fonction  $\varphi^{(p)}$  est bornée sur  $]-1, 1[$ .

On admet que la fonction  $\Phi_p$  est bornée sur  $\mathcal{D}$ .

**Q 27.** Soit  $r$  un réel de l'intervalle  $]0, 1[$ . Démontrer, pour tous entiers  $n \geq 1$  et  $p \geq 1$ , que

$$\begin{aligned} & (n+p)(n+p-1) \cdots (n+1) a_{n+p} r^n \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_p(r e^{i\theta}) e^{-ni\theta} d\theta. \end{aligned}$$

**Q 28.** Démontrer que, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , il existe un réel  $K_p$  et un entier naturel  $N_p$  tels que

$$\forall n \geq N_p, |a_n| \leq \frac{K_p}{n^p}.$$

**Q 29.** Démontrer que la série entière  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  converge normalement sur  $[0, 1]$  et donner la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

**Q 30.** Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . Démontrer que la série entière  $\sum_{n \geq 0} (n+p)(n+p-1) \cdots (n+1) a_{n+p} x^n$  converge normalement sur  $[0, 1]$  et donner la valeur de

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (n+p)(n+p-1) \cdots (n+1) a_{n+p}.$$

**Q 31.** Démontrer que tous les moments d'ordre  $p$  de la suite  $(a_n)$  sont nuls.

**III Moments d'une fonction**

Soit  $f$  une fonction continue sur  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On dit que  $f$  admet un moment d'ordre  $p \in \mathbb{N}$  si la fonction  $t \mapsto t^p f(t)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$  et on appelle moment d'ordre  $p$  de  $f$  le nombre

$$\mu_p(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^p f(t) dt.$$

Le but de cette partie est de construire une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ , non nulle, dont tous les moments d'ordre  $p$  ( $p \in \mathbb{N}$ ) sont nuls.

**III.A – Étude d'une fonction à valeurs dans  $\mathbb{C}$** 

On définit la fonction  $\theta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  par

$$\begin{cases} \theta(x) = 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \theta(x) = \exp\left(-\frac{\ln^2 x}{4\pi^2} + i \frac{\ln x}{2\pi}\right) & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

**Q 32.** Montrer que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} |\theta(x)| = 0$ .

**Q 33.** Justifier que  $\theta$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^{+*}$  et démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , il existe  $P_n \in \mathbb{C}[X]$  tel que

$$\forall x \in ]0, +\infty[, \theta^{(n)}(x) = \frac{P_n(\ln x)}{x^n} \theta(x).$$

**Q 34.** En déduire que  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} |\theta^{(n)}(x)| = 0$ .

On pourra effectuer le changement de variable  $y = -\ln x$ .

**Q 35.** Démontrer que  $\theta$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$ .

**III.B – Étude d'une intégrale**

**Q 36.** Montrer que pour tout entier naturel  $p$ , l'intégrale

$$I_p = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-p\pi)^2} \sin t dt$$

est absolument convergente et qu'elle vaut zéro.

**Q 37.** À l'aide du changement de variable  $t = \frac{\ln x}{2\pi}$ , démontrer que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,

$$I_p = \frac{e^{-p^2 \pi^2}}{2\pi} \int_0^{+\infty} x^{p-1} \exp\left(-\frac{\ln^2 x}{4\pi^2}\right) \sin\left(\frac{\ln x}{2\pi}\right) dx.$$

**Q 38.** Conclure.

---

• • • FIN • • •

---