Corrigé du douzième devoir de révision

Q 1. Soit $k \in [\![1, n]\!]$.
Par hypothèse, $X > 0$, donc $X^k > 0$.
Si $X \leqslant 1$, alors $X^k \leqslant 1 \leqslant 1 + X^n$.
Si $X \geqslant 1$, alors $X^k \leqslant X^n \leqslant 1 + X^n$.
Dans tous les cas, $X^k \leqslant 1 + X^n$.

Q 2. Comme X admet un moment d'ordre n, X^n admet une espérance et d'après le théorème de transfert, la famille $(x^n\,\mathbb{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. De plus, puisque $\mathbb{P}$ est une probabilité, la famille $(\mathbb{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. Alors, la famille $((1+x^n)\,\mathbb{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. D'après la question Q1, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ et tout $x \in X(\Omega)$, $0 < x^k \leqslant 1+x^n$, donc $0 < x^k\mathbb{P}(X=x) \leqslant (1+x^n)\mathbb{P}(X=x)$ et par majoration, la famille $(x^k\,\mathbb{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. D'après le théorème de transfert, cela signifie que X^k admet une espérance, ou encore que X admet un moment d'ordre k.

Si X admet un moment d'ordre n, elle en admet d'ordre k pour tout $k \in [\![1, n]\!]$.

Q 3. Comme M_X est la somme d'une série entière, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_n(X) = M_X^{(n)}(0)$. Cela signifie que

la connaissance de M_X permet de déterminer tous les moments de X.

Q 4. Soit $t \in \left]-R_X, R_X\right[$. Faisons un calcul formel que l'on justifiera ensuite.

Calcul formel. Ici, il est plus aisé de dénombrer :

$$X(\Omega) = \{x_k,\ k \in \mathbb{N}\}.$$

C'est permis puisque X est une variable aléatoire discrète. On a

$$
\begin{aligned}
M_X(t) &= \sum_{n=0}^{+\infty} m_n(X)\,\frac{t^n}{n!}\\
\text{(1)}\qquad &= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} x_k^n\,\mathbb{P}(X=x_k)\,\frac{t^n}{n!}\\
\text{(2)}\qquad &= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} x_k^n\,\frac{t^n}{n!}\,\mathbb{P}(X=x_k)\\
\text{(3)}\qquad &= \sum_{k=0}^{+\infty} e^{tx_k}\,\mathbb{P}(X=x_k)\\
\text{(4)}\qquad &= \mathbb{E}(e^{tX}).
\end{aligned}
$$

Justifications.
(1) C'est la définition des $m_n(X)$.
(3) On reconnait le développement en série entière de l'exponentielle, valable sur $\mathbb{R}$.
(4) Avec le théorème de transfert, on reconnait l'espérance de e^{tX}, qui existe donc au passage.
(2) Posons $u_{n,k} = x_k^n\,\mathbb{P}(X=x_k)\,t^n/n!$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k\geqslant 0} u_{n,k}$ converge absolument puisque $m_n(X)$ existe : (i) est vérifiée.

De plus, $\sum_{n\geqslant 0}\sum_{k=0}^{+\infty}|u_{n,k}|$ converge, car $X > 0$ et la série définissant $M_X(t)$ converge absolument puisque $|t| < R_X$: (ii) est vérifiée.

D'après le préambule, on peut permuter les deux signes $\sum$: c'est la justification (2) attendue.

Commentaire. Constatons que pour tout $|t| < R_X$, on a donc

$$M_X(t) = \mathbb{E}((e^t)^X) = G_X(e^t),$$

où l'on reconnait la fonction génératrice de X.

Q 5. Sans difficulté, il suffit de remonter les calculs précédents. Précisons simplement la phase de permutation dans l'autre sens.

Avec les mêmes $u_{n,k}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\sum_{n\geqslant 0} u_{n,k}$ converge absolument puisqu'on reconnait le développement en série entière de e^{tx_k} : (i) est vérifiée.

De plus, $\sum_{k\geqslant 0}\sum_{n=0}^{+\infty}|u_{n,k}|$ converge, car $X > 0$ et la série définissant $\mathbb{E}(e^{tX})$ converge absolument par hypothèse pour $|t| < R$: (ii) est vérifiée.

D'après le préambule, on peut permuter les deux signes $\sum$: c'est la permutation dans l'autre sens attendue.

Q 6. Soit $|t| < \min(R_X, R_Y)$. Alors $M_X(t)$ et $M_Y(t)$ sont définies. D'après la question Q4, e^{tX} et e^{tY} admettent une espérance et

$$\mathbb{E}(e^{tX}) = M_X(t),\ \mathbb{E}(e^{tY}) = M_Y(t).$$

Comme X et Y sont indépendantes, e^{tX} et e^{tY} le sont aussi donc leur produit admet une espérance et

$$\mathbb{E}(e^{tX}\,e^{tY}) = \mathbb{E}(e^{tX})\mathbb{E}(e^{tY}).$$

Ainsi, $e^{t(X+Y)} = e^{tX}\,e^{tY}$ admet une espérance et d'après la question Q5, $M_{X+Y}(t)$ est définie.

Cela signifie que $X+Y$ admet des moments de tous ordres.

De plus,

$$
\begin{aligned}
M_{X+Y}(t) &= \mathbb{E}(e^{t(X+Y)}) = \mathbb{E}(e^{tX})\mathbb{E}(e^{tY})\\
&= M_X(t)\,M_Y(t).
\end{aligned}
$$

Q 7. On suppose que $Z \sim \mathscr{P}(\lambda)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$: étudions $\sum_{k\geqslant 0} k^n\,\mathbb{P}(Z=k)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|\frac{(k+1)^n\,e^{-\lambda}\,\lambda^{k+1}/(k+1)!}{k^n\,e^{-\lambda}\,\lambda^k/k!}\right| \sim \frac{\lambda}{k+1} \xrightarrow[k\to+\infty]{} 0,$$

donc avec la règle de d'Alembert, $\sum_{k\geqslant 0} k^n\,\mathbb{P}(Z=k)$ converge absolument, ce qui signifie que Z admet un moment d'ordre n, toujours grâce au théorème de transfert.

Z admet des moments de tous ordres.

Q 8. En vertu du commentaire de la question Q4, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$M_Z(t) = G_Z(e^t) = \exp(\lambda\,(e^t-1)).$$

D'après la question Q3,

$$m_1(Z) = M_Z'(0) \text{ et } m_2(Z) = M_Z''(0).$$

On pourrait dériver M_Z. Faisons plutôt un développement limité à l'ordre 2. Pour t proche de 0,

$$\begin{aligned} M_Z(t) &= \exp(\lambda\,(t+\tfrac{1}{2}\,t^2+\mathrm{o}(t^2))) \\ &= 1+\lambda\,(t+\tfrac{1}{2}\,t^2)+\tfrac{1}{2}\,(\lambda\,t)^2+\mathrm{o}(t^2) \\ &= 1+\lambda\,t+\tfrac{1}{2}\,(\lambda+\lambda^2)\,t^2+\mathrm{o}(t^2). \end{aligned}$$

D'où $m_1(Z)=\lambda$ et $m_2(Z)=\lambda+\lambda^2$.

Q 9. On suppose que pour $i\in[\![1,n]\!]$, $X_i\sim\mathscr{B}(\lambda/n)$. Pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$M_{X_i}(t)=G_{X_i}(e^t)=1-\frac{\lambda}{n}+e^t\,\frac{\lambda}{n}.$$

Par une récurrence immédiate appliquée à la question Q6, sachant que les X_i sont mutuellement indépendantes et grâce au lemme des coalitions,

$$M_{S_n}(t)=\prod_{i=1}^{n}M_{X_i}(t)=\left(1-\frac{\lambda}{n}+e^t\,\frac{\lambda}{n}\right)^n.$$

Q 10. Soit $t\in\mathbb{R}$.

$$M_{S_n}(t)=\left(1+\frac{\lambda\,(e^t-1)}{n}\right)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\exp(\lambda\,(e^t-1)).$$

Q 11. Où l'on constate que pour tout $t\in\mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to+\infty}M_{S_n}(t)=M_Z(t).$$

Q 12. Soit $t\in\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} M_{Y_n}(t) &= \mathbb{E}(e^{tY_n})=\mathbb{E}(e^{tU_n/n}) \\ &= \sum_{k=1}^{n}e^{tk/n}\,\mathbb{P}(U_n=k)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{tk/n} \\ &= \frac{1}{n}\,e^{t/n}\,\frac{1-e^t}{1-e^{t/n}}. \end{aligned}$$

Q 13. Soit $t\in\mathbb{R}$. Quand n tend vers $+\infty$,

$$M_{Y_n}(t)\sim\frac{1}{n}\,\frac{1-e^t}{-t/n}=\frac{e^t-1}{t}.$$

Q 14. Clairement, par opérations usuelles,

φ est définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\smallsetminus\{1\}$.

De plus, $\displaystyle\lim_{x\to1^-}\frac{-x}{\sqrt{1-x}}=-\infty$, donc

$$\lim_{x\to1^-}\varphi(x)=0=\varphi(1)=\lim_{x\to1^+}\varphi(x),$$

donc φ est continue sur $\mathbb{R}$.

Q 15. Pour tout $x<1$,

$$\varphi'(x)=\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x}}-\frac{x}{2\,(1-x)^{3/2}}\right)\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x}}\right),$$

donc pour $x<1$ proche de 1,

$$\varphi'(x)\sim-\frac{1}{2\,(1-x)^{3/2}}\exp\left(-\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right).$$

En posant $u=1/\sqrt{1-x}$, par croissances comparées

$$\lim_{x\to1^-}\varphi'(x)=\lim_{u\to+\infty}-\tfrac{1}{2}\,u^3\,e^{-u}=0.$$

Et bien-sûr, $\lim_{x\to1^+}\varphi'(x)=0$.

Ainsi, φ est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}\smallsetminus\{1\}$, φ' admet en 1 des limites à droite et à gauche égales. D'après le théorème du prolongement de classe $\mathscr{C}^1$,

φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\varphi'(1)=0$.

Q 16. Procédons par récurrence.

D'après la question précédente, pour tout $x<1$,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{-2+x}{2\,(1-x)^{3/2}}\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x}}\right) \\ &= \frac{-1-(1-x)}{2\,(1-x)^{3/2}}\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x}}\right) \\ &= \frac{P_1(\sqrt{1-x}\,)}{Q_1(\sqrt{1-x}\,)}\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{1-x}}\right), \end{aligned}$$

en posant $P_1=-1-X^2$ et $Q_1=2\,X^3$. En considérant la fraction rationnelle $F_1=P_1/Q_1$, on peut même dire que

$$\varphi'(x)=F_1(\sqrt{1-x}\,)\,\varphi(x).$$

Supposons que la propriété soit vraie pour un rang $p\geqslant1$. Pour tout $x<1$, en considérant la fraction rationnelle $F_p=P_p/Q_p$, on peut donc écrire

$$\varphi^{(p)}(x)=F_p(\sqrt{1-x}\,)\,\varphi(x).$$

En dérivant, on obtient,

$$\begin{aligned} \varphi^{(p+1)}(x) &= -\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\,F_p'(\sqrt{1-x}\,)\,\varphi(x) \\ &\quad+F_p(\sqrt{1-x}\,)\,\varphi'(x) \\ &= \Bigg(-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}\,F_p'(\sqrt{1-x}\,) \\ &\quad+F_p(\sqrt{1-x}\,)\,F_1(\sqrt{1-x}\,)\Bigg)\varphi(x) \\ &= F_{p+1}(\sqrt{1-x}\,)\,\varphi(x), \end{aligned}$$

en posant

$$F_{p+1}=-\frac{F_p'}{2\,X}+F_p\,F_1.$$

Par le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $p\geqslant1$.

Q 17. Soit $p\in\mathbb{N}^*$. Si 0 n'est pas pôle de F_p,

$$\lim_{x\to1^-}F_p(\sqrt{1-x}\,)=\ell\in\mathbb{R},$$

donc, comme $\lim_{x\to1^-}\varphi(x)=0$,

$$\lim_{x\to1^-}\varphi^{(p)}(x)=0.$$

Et si 0 est pôle de F_p d'ordre $m\in\mathbb{N}^*$, il existe $\alpha\in\mathbb{R}^*$ tel que pour $x<1$ proche de 1,

$$F_p(\sqrt{1-x}\,)\sim\frac{\alpha}{(\sqrt{1-x}\,)^m},$$

donc, en notant encore $u=1/\sqrt{1-x}$,

$$\lim_{x\to1^-}\varphi^{(p)}(x)=\lim_{u\to+\infty}\alpha\,u^m\,e^{-u}=0,$$

à nouveau par croissances comparées.

Ainsi, $\lim_{x\to1^-}\varphi^{(p)}(x)=0$.

Q 18. Une « simple » récurrence, dont la transmission est calquée sur la question Q15, permet d'affirmer que

φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que $\varphi^{(p)}(1)=0$.

Q 19. D'après le développement en série entière de l'exponentielle, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$,

$$\varphi(x) = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{q!}\Big(-\frac{x}{\sqrt{1-x}}\Big)^q = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{(-1)^q}{q!}\,x^q\,(1-x)^{-q/2}.$$

Q 20. Soit $q \in \mathbb{N}^*$. D'après le développement en série entière de $(1+x)^\alpha$, avec ici $\alpha = -q/2$, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$,

$$(1-x)^{-q/2} = \sum_{p=0}^{+\infty} \binom{-q/2}{p}(-x)^p.$$

Par ailleurs, pour $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\binom{-q/2}{p} &= \frac{(-\frac{q}{2})(-\frac{q}{2}-1)\cdots(-\frac{q}{2}-p+1)}{p!} \\ &= \frac{1}{p!}\prod_{k=0}^{p-1}\Big(-\frac{q}{2}-k\Big) = \frac{(-1)^p}{p!}\prod_{k=0}^{p-1}\Big(\frac{q}{2}+k\Big) \\ &= \frac{(-1)^p}{p!}\prod_{k=0}^{p-1}\Big(\frac{q}{2}+p-1-k\Big) \text{ avec } k \to p-1-k \\ &= (-1)^p\,H_p\Big(\frac{q}{2}+p-1\Big).\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \left]-1,1\right[$,

$$(1-x)^{-q/2} = \sum_{p=0}^{+\infty} H_p\Big(\frac{q}{2}+p-1\Big)x^p.$$

Commentaire. Dans cette question, on a utilisé la convention habituelle qu'un produit vide vaut 1, ce qui arrive quand $p=0$.

Q 21. Alors, pour tout $x \in \left]-1,1\right[$,

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= 1 + \sum_{q=1}^{+\infty}\frac{(-1)^q}{q!}\,x^q\,(1-x)^{-q/2} \\ &= 1 + \sum_{q=1}^{+\infty}\frac{(-1)^q}{q!}\,x^q\left(\sum_{p=0}^{+\infty}H_p\Big(\frac{q}{2}+p-1\Big)x^p\right) \\ &= 1 + \sum_{q=1}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{+\infty}\frac{(-1)^q}{q!}H_p\Big(\frac{q}{2}+p-1\Big)x^{p+q}\right) \\ &= 1 + \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{i+1}}{(i+1)!}H_j\Big(\frac{i-1}{2}+j\Big)x^{i+j+1}\right),\end{aligned}$$

où l'on a posé $p=j$ et $q=i+1$.

Q 22. Reprenons les questions Q19 à Q21, en accéléré.
Comme en Q19, pour $x \in \left]-1,1\right[$,

$$\exp\Big(\frac{|x|}{\sqrt{1-|x|}}\Big) = \sum_{q=0}^{+\infty}\frac{1}{q!}|x|^q(1-|x|)^{-q/2}.$$

Comme en Q20, pour $q \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \left]-1,1\right[$,

$$(1-|x|)^{-q/2} = \sum_{p=0}^{+\infty}H_p\Big(\frac{q}{2}+p-1\Big)|x|^p.$$

Donc comme en Q21,

$$\begin{aligned}\exp\Big(\frac{|x|}{\sqrt{1-|x|}}\Big) &= 1 + \sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{q!}|x|^q(1-|x|)^{-q/2} \\ &= 1 + \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{1}{(i+1)!}H_j\Big(\frac{i-1}{2}+j\Big)|x|^{i+j+1}\right) \\ &= 1 + \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}|a_{i,j}(x)|\right).\end{aligned}$$

Q 23. Soit $x \in \left]-1,1\right[$. D'après ce qui précède, pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\sum_{j\geqslant 0}|a_{i,j}(x)|$ converge et

$$\sum_{i\geqslant 0}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}|a_{i,j}(x)|\right)$$

converge. Donc le préambule permet de permuter les deux signes $\sum$ dans la question Q21 :

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= 1 + \sum_{i=0}^{+\infty}\left(\sum_{j=0}^{+\infty}a_{i,j}(x)\right) \\ &= 1 + \sum_{j=0}^{+\infty}\left(\sum_{i=0}^{+\infty}a_{i,j}(x)\right) \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{p+q=n}a_{p,q}(x)\right).\end{aligned}$$

En outre, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}&\sum_{p+q=n}a_{p,q}(x) \\ &= \sum_{p+q=n}\frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!}H_q\Big(\frac{p-1}{2}+q\Big)x^{p+q+1} \\ &= \sum_{q=0}^{n}\frac{(-1)^{n-q+1}}{(n-q+1)!}H_q\Big(\frac{n-q-1}{2}+q\Big)x^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k+1}}{(n-k+1)!}H_k\Big(\frac{n+k-1}{2}\Big)x^{n+1}.\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}&\varphi(x) \\ &= 1 + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^{n-k+1}}{(n-k+1)!}H_k\Big(\frac{n+k-1}{2}\Big)\right)x^{n+1} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}H_k\Big(\frac{n+k-2}{2}\Big)\right)x^{n} \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(-1)^{n-k}}{(n-k)!}H_k\Big(\frac{n+k}{2}-1\Big)\right)x^{n}.\end{aligned}$$

Q 24. D'après la question précédente, $\sum_{n\geqslant 0}a_n\,x^n$ converge absolument pour tout $x \in \left]-1,1\right[$, ce qui signifie que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geqslant 0}a_n\,z^n$ est plus grand que 1, donc pour tout $|z|<1$, $\sum_{n\geqslant 0}a_n\,z^n$ converge absolument.

Ainsi, pour tout $z \in \mathcal{D}$, $\sum_{n\geqslant 0}a_n\,z^n$ converge absolument.

Q 25. Comme φ est développable en série entière sur $]-1,1[$, elle y est de classe $\mathscr{C}^\infty$ — ce que l'on savait déjà — et on peut dériver le développement en série entière terme à terme : pour tout $x \in]-1,1[$ et tout $p \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}\varphi^{(p)}(x) &= \sum_{n=p}^{+\infty} n\,(n-1)\cdots(n-p+1)\,a_n\,x^{n-p}\\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+p)\,(n+p-1)\cdots(n+1)\,a_{n+p}\,x^n\\ &= \varPhi_p(x).\end{aligned}$$

Comme précédemment, le rayon de convergence de $\sum_{n\geqslant 0}(n+p)\,(n+p-1)\cdots(n+1)\,a_{n+p}\,z^n$ est donc supérieur à 1 et cette série entière converge absolument pour tout $z \in \mathcal{D}$.

Q 26. On a vu à la question Q18 que φ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. En particulier, elle et ses dérivées sont continues sur le segment $[-1,1]$, donc elles y sont bornées.

Ainsi, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\varphi^{(p)}$ est bornée sur $]-1,1[$.

Q 27. Soient $r \in]0,1[$, n et p dans $\mathbb{N}^*$. Faisons un calcul formel que l'on justifiera ensuite.

Calcul formel.

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varPhi_p(r\,e^{i\theta})\,e^{-ni\theta}\,\mathrm{d}\theta\\ &\overset{(1)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\prod_{j=1}^{p}(k+j)\right)a_{k+p}\,r^k\,e^{(k-n)i\theta}\,\mathrm{d}\theta\\ &\overset{(2)}{=} \frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\prod_{j=1}^{p}(k+j)\right)a_{k+p}\,r^k\int_0^{2\pi}e^{(k-n)i\theta}\,\mathrm{d}\theta\\ &\overset{(3)}{=} \left(\prod_{j=1}^{p}(n+j)\right)a_{n+p}\,r^n.\end{aligned}$$

Justifications.
(1) D'après la question Q24, pour tout $z \in \mathcal{D}$,

$$\begin{aligned}\varPhi_p(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty}(k+p)\,(k+p-1)\cdots(k+1)\,a_{k+p}\,z^k\\ &= \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\prod_{j=1}^{p}(k+j)\right)a_{k+p}\,z^k.\end{aligned}$$

Comme $r \in]0,1[$, pour tout $\theta \in [0,2\pi]$, $|r\,e^{i\theta}| = r < 1$, donc $r\,e^{i\theta} \in \mathcal{D}$ et l'on peut écrire

$$\varPhi_p(r\,e^{i\theta}) = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\prod_{j=1}^{p}(k+j)\right)a_{k+p}\,r^k\,e^{ki\theta},$$

ce qui justifie (1).
(2) Soient $\theta \in [0,2\pi]$ et $k \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned}&\left|\left(\prod_{j=1}^{p}(k+j)\right)a_{k+p}\,r^k\,e^{(k-n)i\theta}\right|\\ &\qquad= \left(\prod_{j=1}^{p}(k+j)\right)|a_{k+p}|\,r^k.\end{aligned}$$

D'après la question Q25, le rayon de convergence de

$$\sum_{k\geqslant 0}\left(\prod_{j=1}^{p}(k+j)\right)a_{k+p}\,x^k$$

est plus grand que 1, donc puisque $r < 1$,

$$\sum_{k\geqslant 0}\left(\prod_{j=1}^{p}(k+j)\right)a_{k+p}\,r^k$$

converge absolument, c'est-à-dire que

$$\sum_{k\geqslant 0}\left(\prod_{j=1}^{p}(k+j)\right)|a_{k+p}|\,r^k$$

converge. Alors, la série des fonctions continues

$$\theta \mapsto \left(\prod_{j=1}^{p}(k+j)\right)a_{k+p}\,r^k\,e^{(k-n)i\theta}$$

converge normalement sur $[0,2\pi]$, ce qui autorise la permutation (2).
(3) Si $k \neq n$,

$$\int_0^{2\pi}e^{(k-n)i\theta}\,\mathrm{d}\theta = \left[\frac{e^{(k-n)i\theta}}{(k-n)\,i}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Sinon,

$$\int_0^{2\pi}e^{(n-n)i\theta}\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta = 2\pi.$$

Cela justifie la simplification (3).

Q 28. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. D'après l'énoncé, $\varPhi_p$ est bornée sur $\mathcal{D}$, donc

$$\exists M_p \in \mathbb{R}_+, \forall z \in \mathcal{D},\ |\varPhi_p(z)| \leqslant M_p.$$

De plus, avec la question précédente, pour tout $r \in]0,1[$ et tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}&|(n+p)\,(n+p-1)\cdots(n+1)\,a_{n+p}\,r^n|\\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\varPhi_p(r\,e^{i\theta})|\,|e^{-in\theta}|\,\mathrm{d}\theta\\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}M_p\,\mathrm{d}\theta = M_p.\end{aligned}$$

Alors,

$$|a_{n+p}|\,r^n \leqslant \frac{M_p}{(n+p)\,(n+p-1)\cdots(n+1)}.$$

Comme c'est vrai pour tout $r \in]0,1[$, en passant à la limite quand r tend vers 1,

$$|a_{n+p}| \leqslant \frac{M_p}{(n+p)\,(n+p-1)\cdots(n+1)},$$

ou encore, en décalant l'indice,

$$|a_n| \leqslant \frac{M_p}{n\,(n-1)\cdots(n-p+1)}.$$

Enfin, quand n est grand,

$$\frac{1}{n\,(n-1)\cdots(n-p+1)} \sim \frac{1}{n^p},$$

donc il existe un rang N_p tel que pour tout $n \geqslant N_p$,

$$\frac{1}{n\,(n-1)\cdots(n-p+1)} \leqslant \frac{3}{2\,n^p}.$$

Alors,

$$|a_n| \leqslant \frac{3\,M_p}{2\,n^p} = \frac{K_p}{n^p}$$

en posant $K_p = 3\,M_p/2$.

Q 29. En appliquant cette majoration pour $p=2$, on voit que quand $n\to+\infty$,

$$a_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

donc $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ converge absolument. Ainsi, comme pour tout $x\in[0,1]$ et tout $n\in\mathbb{N}$, $|a_n\,x^n|\leqslant|a_n|$,

la série entière $\sum_{n\geqslant 0} a_n\,x^n$ converge normalement sur $[0,1]$.

De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\lim_{x\to 1^-} a_n\,x^n = a_n$. Donc d'après le théorème de la double limite,

$$\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n.$$

Par ailleurs, $\varphi(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et d'après la question Q14, $\lim_{x\to 1^-}\varphi(x)=\varphi(1)=0$. Alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0.$$

Q 30. Soit $p\in\mathbb{N}^*$ *fixé* : posons

$$b_{n,p} = (n+p)\,(n+p-1)\cdots(n+1)\,a_{n+p}.$$

Avec la majoration de la question Q28, quand $n\to+\infty$,

$$a_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^{p+2}}\right)$$

donc

$$b_{n,p}\sim n^p\,a_n = \mathrm{O}\left(\frac{1}{n}^2\right).$$

Comme à la question précédente, on en déduit que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} b_{n,p}\,x^n$ converge normalement sur $[0,1]$.

Et d'après le théorème de la double limite, la question Q25 puis la question Q17,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} b_{n,p} = \lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{+\infty} b_{n,p}\,x^n = \lim_{x\to 1^-}\varphi^{(p)}(x) = 0.$$

Q 31. Pour tout $p\in\mathbb{N}$, nommons m_p le moment d'ordre p de la suite (a_n).

D'après la question Q29,

$$m_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n = 0.$$

De même, d'après la question Q30 pour $p=1$,

$$\begin{aligned} m_1 &= \sum_{n=0}^{+\infty} n\,a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\,a_{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} b_{n,1} = 0. \end{aligned}$$

Toujours d'après la question Q30,

$$\begin{aligned} m_2 &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^2\,a_n = \sum_{n=0}^{+\infty}[n\,(n-1)+n]\,a_n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n\,(n-1)\,a_n + \sum_{n=0}^{+\infty} n\,a_n \\ &= \sum_{n=2}^{+\infty} n\,(n-1)\,a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} n\,a_n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)\,(n+1)\,a_{n+2} + \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)\,a_{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} b_{n,2} + \sum_{n=0}^{+\infty} b_{n,1} = 0. \end{aligned}$$

Plus généralement, reprenons les polynômes de Hilbert de la question Q19 : la famille $(H_0,H_1,\dots,H_p)$ est échelonnée, donc c'est une base de $\mathbb{R}_p[X]$. Alors, X^p s'y décompose sous la forme :

$$X^p = \sum_{k=0}^{p}\alpha_k\,H_k.$$

Donc,

$$\begin{aligned} m_p &= \sum_{n=0}^{+\infty} n^p\,a_n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{p}\alpha_k\,H_k(n)\right)a_n \\ &= \sum_{k=0}^{p}\alpha_k\left(\sum_{n=0}^{+\infty} H_k(n)\,a_n\right). \end{aligned}$$

La permutation est permise car la somme intérieure est finie. De plus, si $k\geqslant 1$ et $n\leqslant k-1$,

$$H_k(n) = \frac{1}{k!}\prod_{j=0}^{k-1}(n-j) = 0,$$

et si $n\geqslant k$,

$$H_k(n)\,a_n = \frac{1}{k!}\,n\,(n-1)\cdots(n-k+1)\,a_n = \frac{1}{k!}\,b_{n-k,k}.$$

Donc, avec les questions Q29 et Q30,

$$\begin{aligned} m_p &= \sum_{k=0}^{p}\frac{\alpha_k}{k!}\left(\sum_{n=k}^{+\infty} b_{n-k,k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{p}\frac{\alpha_k}{k!}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_{n,k}\right) = 0. \end{aligned}$$

Ainsi, tous les moments de (a_n) sont nuls.

Q 32. Soit $x>0$. On a

$$|\theta(x)| = \exp\left(-\frac{\ln^2 x}{4\,\pi^2}\right).$$

Or $\lim_{0^+}\ln = -\infty$, donc $\lim_{0^+} -\ln^2 = -\infty$. De plus, $\lim_{-\infty}\exp = 0$, donc par composition de limites,

$\lim_{0^+}|\theta| = 0$.

Q 33. Pour $x>0$, posons $u(x)=\dfrac{\ln x}{2\,\pi}$, de sorte que

$$\theta(x) = e^{-u^2(x)}\,e^{i\,u(x)}.$$

Bien-sûr, la fonction u est C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$. Les fonctions $y\mapsto e^y$ et $y\mapsto e^{iy}$ le sont aussi, donc par composition et produit, θ est C^∞ sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Procédons par récurrence.

Initialisation. Soit $x > 0$: $u'(x) = \dfrac{1}{2\pi x}$, donc

$$\begin{aligned}\theta'(x) &= -2u'(x)\,u(x)\,e^{-u^2(x)}\,e^{iu(x)}\\ &\quad + e^{-u^2(x)}\,i\,u'(x)\,e^{iu(x)}\\ &= u'(x)\,(i-2u(x))\,e^{-u^2(x)}\,e^{iu(x)}\\ &= \frac{1}{x}\left(\frac{i}{2\pi}-\frac{\ln x}{\pi}\right)\theta(x) = \frac{P_1(\ln x)}{x}\,\theta(x),\end{aligned}$$

en posant $P_1 = \dfrac{i}{2\pi} - \dfrac{\ln x}{\pi} \in \mathbb{C}[X]$.

Transmission. Supposons que l'expression de l'énoncé soit vraie pour un rang $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $x > 0$. En dérivant comme un produit et en utilisant l'initialisation qui est acquise,

$$\begin{aligned}\theta^{(n+1)}(x) &= \frac{-n}{x^{n+1}}\,P_n(\ln x)\,\theta(x) + \frac{1}{x^n}\,\frac{1}{x}\,P_n'(\ln x)\,\theta(x)\\ &\qquad + \frac{1}{x^n}\,P_n(\ln x)\,\frac{P_1(\ln x)}{x}\,\theta(x)\\ &= \frac{-n\,P_n(\ln x) + P_n'(\ln x) + P_n(\ln x)\,P_1(\ln x)}{x^{n+1}}\,\theta(x)\\ &= \frac{P_{n+1}(\ln x)}{x^{n+1}}\,\theta(x),\end{aligned}$$

en posant $P_{n+1} = (P_1 - n)\,P_n + P_n' \in \mathbb{C}[X]$.

Conclusion. Par le principe de récurrence, la propriété de l'énoncé est démontrée.

Q 34. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$. En posant $y = -\ln x$,

$$\begin{aligned}|\theta^{(n)}(x)| &= \left|\frac{P_n(\ln x)}{x^n}\right| |\theta(x)|\\ &= |P_n(-y)|\,e^{ny}\,e^{-y^2/2}\\ &= |P_n(-y)|\,e^{-y^2/4}\,e^{ny-y^2/4}.\end{aligned}$$

Quand $x \to 0^+$, $y \to +\infty$ et réciproquement. Par croissances comparées, quel que soit le degré de P_n,

$$\lim_{y\to+\infty} |P_n(-y)|\,e^{-y^2/4} = 0.$$

Et comme $\lim_{y\to+\infty}(ny - y^2/4) = -\infty$,

$$\lim_{y\to+\infty} e^{ny-y^2/4} = 0.$$

Alors, par produit de limites,

$$\boxed{\lim_{x\to0^+} |\theta^{(n)}(x)| = 0.}$$

Q 35. Oui, avec une démarche analogue à celle menée dans les questions Q15, Q17 et Q18.

Q 36. Soit $p \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto e^{-(t-p\pi)^2}\sin t$ est continue sur $\mathbb{R}$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$|e^{-(t-p\pi)^2}\sin t| \leqslant e^{-(t-p\pi)^2}.$$

À l'aide du changement de variable $u = t - p\pi$, qui est valide car bijectif et C^1, les intégrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-p\pi)^2}\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$$

ont même nature. Or la fonction $u \mapsto e^{-u^2}$ est paire, donc il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}^+$. Enfin, pour $u \geqslant 1$, $e^{-u^2} \leqslant e^{-u}$. Comme $u \mapsto e^{-u}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, $u \mapsto e^{-u^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, donc sur $\mathbb{R}$. Ainsi, $t \mapsto e^{-(t-p\pi)^2}\sin t$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et

l'intégrale I_p converge absolument.

En exploitant encore le changement de variable $t = u - p\pi$,

$$\begin{aligned}I_p &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-p\pi)^2}\sin t\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\sin(u+p\pi)\,\mathrm{d}u\\ &= (-1)^p \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2}\sin u\,\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

Comme la fonction $u \mapsto e^{-u^2}\sin u$ est impaire et que $\mathbb{R}$ est un intervalle symétrique autour de 0, cette dernière intégrale est nulle.

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $I_p = 0$.

Q 37. Le changement de variable $x \mapsto t = \frac{\ln x}{2\pi}$ est bijectif et C^1 de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$, donc, sachant que I_p converge absolument, le calcul suivant est licite :

$$\begin{aligned}&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(t-p\pi)^2}\sin t\,\mathrm{d}t\\ &= \int_{0}^{+\infty} \exp\left(-\left(\frac{\ln x}{2\pi}-p\pi\right)^2\right)\sin\left(\frac{\ln x}{2\pi}\right)\frac{\mathrm{d}x}{2\pi x}\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\left(\frac{\ln x}{2\pi}-p\pi\right)^2 = \frac{\ln^2 x}{4\pi^2} - p\ln x + p^2\pi^2,$$

donc

$$\begin{aligned}&\exp\left(-\left(\frac{\ln x}{2\pi}-p\pi\right)^2\right)\\ &= \exp\left(-\frac{\ln^2 x}{4\pi^2}\right)\exp(p\ln x)\exp(-p^2\pi^2)\\ &= e^{-p^2\pi^2}\,x^p\exp\left(-\frac{\ln^2 x}{4\pi^2}\right).\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{I_p = \frac{e^{-p^2\pi^2}}{2\pi}\int_0^{+\infty} x^{p-1}\exp\left(-\frac{\ln^2 x}{4\pi^2}\right)\sin\left(\frac{\ln x}{2\pi}\right)\mathrm{d}x.}$$

Q 38. Considérons la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\boxed{f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0,\\ \exp\left(-\dfrac{\ln^2 x}{4\pi^2}\right)\sin\left(\dfrac{\ln x}{2\pi}\right) & \text{si } x > 0.\end{cases}}$$

On reconnait que $f = \mathrm{Im}(\theta)$. Donc f est C^∞ sur $\mathbb{R}$, puisque θ l'est.

D'après les questions Q37 et Q36, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $x \mapsto x^p f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned}\mu_p(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^p f(x)\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{+\infty} x^p\exp\left(-\frac{\ln^2 x}{4\pi^2}\right)\sin\left(\frac{\ln x}{2\pi}\right)\mathrm{d}x\\ &= 2\pi\,e^{(p+1)^2\pi^2}\,I_{p+1} = 0.\end{aligned}$$

Ainsi, la fonction f, qui est non nulle et C^∞ sur $\mathbb{R}$, admet des moments à tout ordre, tous nuls.