Corrigé du troisième devoir de révision

1. La fonction g est clairement continue et positive sur $[0,+\infty[$. De plus, nous savons qu'elle y est intégrable, c'est un exemple fondamental du cours ; et

$$\begin{aligned}\int_{[0,+\infty[} g(x)\,\mathrm{d}x &= \left[-e^{-x}\right]_{[0,+\infty[}\\ &= \lim_{x\to+\infty}(-e^{-x}) + e^0 = 1.\end{aligned}$$

Ainsi, d'après la définition de l'énoncé,

g est bien une densité sur $[0,+\infty[$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. La fonction $x\mapsto x^n\,g(x)$ est bien-sûr continue et positive sur $[0,+\infty[$. Elle y est intégrable car l'on reconnait l'intégrande de

$$\Gamma(n+1) = \int_{[0,+\infty[} x^{n+1-1}\,e^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

Donc tous les moments de g sont finis.

Enfin, avec cette reconnaissance, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$m_n(g) = \Gamma(n+1) = n!$$

2. Soit $n\in\mathbb{N}$. La fonction $x\mapsto x^n\,\varphi(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$. De plus, elle a la parité de n : il suffit donc d'étudier son intégrabilité sur $[0,+\infty[$.

Pour x proche de l'infini, $x^2 \gg x$ donc par croissances comparées,

$$|x^n\,\varphi(x)| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,x^n\,e^{-\frac{1}{2}x^2} \ll \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,x^n\,e^{-\frac{1}{2}x} \ll \frac{1}{x^2}.$$

Or $x\mapsto 1/x^2$ est intégrable en $+\infty$ car $2>1$. Donc $x\mapsto x^n\,\varphi(x)$ est intégrable sur $[0,+\infty[$, donc sur $\mathbb{R}$ par parité.

Tous les moments de la densité gaussienne sont bien finis.

Commentaire. En passant, pour $n=0$, on retrouve que φ est intégrable sur $\mathbb{R}$, ce que l'énoncé sous-entendait en la nommant densité.

3. Soit $p\in\mathbb{N}$. La fonction $x\mapsto x^{2p+1}\,\varphi(x)$ est impaire, on l'a dit. Donc son intégrable sur $\mathbb{R}$ est nulle, car $\mathbb{R}$ est symétrique autour de 0.

Pour tout $p\in\mathbb{N}$, $m_{2p+1}(\varphi) = 0$.

4. Soit $p\in\mathbb{N}$:

$$m_{2p}(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} x^{2p}\,e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Faisons une intégration par parties. Pour $p\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}} x^{2p}\,e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} x^{2p-1}\,x\,e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x\\ &= \left[-x^{2p-1}\,e^{-\frac{1}{2}x^2}\right]_{\mathbb{R}} + \int_{\mathbb{R}}(2p-1)\,x^{2p-2}\,e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Le calcul est valide car les deux intégrales convergent, où l'on reconnait $m_{2p}(\varphi)$ et $m_{2p-2}(\varphi)$, à un facteur près. Alors, le crochet a forcément un sens, ce que l'on voit directement :

$$\begin{aligned}&\left[-x^{2p-1}\,e^{-\frac{1}{2}x^2}\right]_{\mathbb{R}}\\ &= \lim_{x\to-\infty} x^{2p-1}\,e^{-\frac{1}{2}x^2} - \lim_{x\to+\infty} x^{2p-1}\,e^{-\frac{1}{2}x^2} = 0.\end{aligned}$$

Ainsi,

$$m_{2p}(\varphi) = (2p-1)\,m_{2p-2}(\varphi).$$

Par une récurrence immédiate, pour tout $p\in\mathbb{N}^*$,

$$m_{2p}(\varphi) = \left(\prod_{k=1}^{p}(2k-1)\right)m_0(\varphi).$$

D'une part, puisque l'énoncé nomme φ densité gaussienne, il sous-entend que c'est une densité, donc $m_0(\varphi)=1$. D'autre part, en multipliant et divisant par les entiers pairs qui manquent,

$$m_{2p}(\varphi) = \prod_{k=1}^{p}(2k-1) = \frac{(2p)!}{2^p\,p!}.$$

5. On sait que

$$\int_{\mathbb{R}}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \Big[\operatorname{Arctan} x\Big]_{\mathbb{R}} = \pi.$$

Alors, la fonction

$$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ x\mapsto\frac{1}{\pi\,(1+x^2)}$$

est une densité sur $\mathbb{R}$. Mais en $+\infty$,

$$x\,f(x)\sim\frac{1}{\pi\,x},$$

donc $x\mapsto x\,f(x)$ n'est pas intégrable sur $[1,+\infty[$, donc pas non plus sur $\mathbb{R}$.

Donc le moment d'ordre 1 de f n'est pas fini.

6-8. Considérons un espace probabilisé $(\Omega,\mathscr{A},P)$ et une variable aléatoire réelle discrète X sur Ω qui suive la loi binomiale $\mathscr{B}(n,x)$: c'est possible car $x\in[0,1]$. Alors,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\,(1-x)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}P(X=k) = 1.$$

De même,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k\,(1-x)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n}k\,P(X=k)\\ &= E(X) = n\,x,\end{aligned}$$

où l'on a reconnu l'espérance de X. Enfin, avec le théorème du transfert et la formule de König-Huygens,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}x^k\,(1-x)^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}k^2\,P(X=k) = E(X^2)\\ &= V(X) + E(X)^2\\ &= n\,x\,(1-x) + (n\,x)^2\\ &= n\,x + n\,(n-1)\,x^2.\end{aligned}$$

Commentaire. Si l'on ne *voit* pas de variable aléatoire cachée dans ces questions, on peut toujours refaire les calculs à la main... Je renvoie bien-sûr au cours pour lesdits calculs.

9. Terminons avec un calcul.

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&=\sum_{k=0}^{n}(k^2-2knx+n^2x^2)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&=\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&\quad-2nx\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&\quad+n^2x^2\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&=nx+n(n-1)x^2-2nxnx+n^2x^2\\
&=nx(1-x).
\end{aligned}$$

On sait que $x(1-x)\leqslant\frac{1}{4}$, comme le prouve une rapide étude de fonction par exemple, ou même directement à l'aide d'une identité remarquable. Alors,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\frac{1}{4}n.}$$

Commentaire. Bien-sûr, dire que $x(1-x)\leqslant 1$ est parfaitement acceptable.

10. En utilisant la question 6, écrivons

$$f(x)=f(x)\cdot 1=f(x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
|B_n(x)-f(x)|&=\left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)\right.\\
&\qquad\left.-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f(x)\right|\\
&=\left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right)\right|\\
&\leqslant\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|.
\end{aligned}$$

Par définition des ensembles X et Y, $[\![0,n]\!]=X\sqcup Y$ donc on peut découper la somme précédente :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\\
&=\sum_{k\in X}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\\
&\quad+\sum_{k\in Y}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|.
\end{aligned}$$

Majorons séparément ces deux sommes. Pour $k\in X$,

$$\left|x-\frac{k}{n}\right|<\alpha,$$

donc avec la propriété (2) de l'énoncé,

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|<\varepsilon.$$

Ainsi, puisque $X\subset[\![0,n]\!]$ et avec la question 6 à nouveau,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\in X}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\\
&\leqslant\sum_{k\in X}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\varepsilon\\
&\leqslant\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\varepsilon=\varepsilon.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, pour $k\in Y$,

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\leqslant\left|f\left(\frac{k}{n}\right)\right|+|f(x)|\leqslant 2\|f\|_\infty$$

donc

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\in Y}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left|f\left(\frac{k}{n}\right)-f(x)\right|\\
&\leqslant 2\|f\|_\infty\sum_{k\in Y}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.
\end{aligned}$$

En regroupant ces majorations, on obtient bien

$$\boxed{|B_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon+2\|f\|_\infty\sum_{k\in Y}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}.}$$

11. Par définition, pour tout $k\in Y$,

$$\left|\frac{k}{n}-x\right|\geqslant\alpha,$$

ou encore,

$$\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\geqslant\alpha^2.$$

Alors, avec la question 9,

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\in Y}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&=\frac{1}{\alpha^2}\sum_{k\in Y}\alpha^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&\leqslant\frac{1}{\alpha^2}\sum_{k\in Y}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&=\frac{1}{\alpha^2n^2}\sum_{k\in Y}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&\leqslant\frac{1}{\alpha^2n^2}\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\
&\leqslant\frac{1}{\alpha^2n^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{n}{4}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{1}{4\alpha^2n}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$|B_n(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon+\frac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2n}.$$

Comme ce dernier quotient tend vers 0 avec n, il existe $N\in\mathbb{N}$ tel que pour tout $n\geqslant N$,

$$\frac{\|f\|_\infty}{2\alpha^2n}\leqslant\varepsilon.$$

Donc pour tout $x\in[0,1]$ et tout $n\geqslant N$,

$$|B_n(x)-f(x)|\leqslant 2\varepsilon.$$

Cela entraine que

$$\|B_n-f\|_\infty\leqslant 2\varepsilon.$$

12. Par hypothèse, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m_n(f) = m_n(g)$ c'est-à-dire

$$\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^n g(x)\,\mathrm{d}x,$$

ou encore

$$\int_0^1 (f(x) - g(x))\, x^n\,\mathrm{d}x = 0.$$

Considérons un polynôme

$$P = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n,$$

où la somme est *finie*. Par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} &\int_0^1 (f(x) - g(x))\, P(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (f(x) - g(x)) \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_0^1 (f(x) - g(x))\, x^n\,\mathrm{d}x = 0. \end{aligned}$$

Il s'agit bien de linéarité, car la somme est finie.

13. Considérons avec la partie II une suite (P_n) de polynômes qui converge uniformément sur $[0,1]$ vers $f - g$. Alors, la suite de fonction $((f-g)P_n)$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers $(f-g)^2$. Les fonctions $(f-g)P_n$ sont bien-sûr continues sur $[0,1]$. Alors, d'après le théorème de permutation limite-intégrale sur un segment, on peut affirmer que

$$\begin{aligned} &\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 (f(x) - g(x))\, P_n(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (f(x) - g(x))^2\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

14. Grâce à la question 12, on en déduit que

$$\int_0^1 (f(x) - g(x))^2\,\mathrm{d}x = 0.$$

Et comme $(f-g)^2$ est continue et positive sur $[0,1]$, elle y est donc nulle. Cela signifie que $f = g$ sur $[0,1]$.

15. Appliquons directement le théorème de continuité des intégrales dépendant d'un paramètre. Posons $A = \mathbb{R}$, $I = \mathbb{R}$ et considérons

$$g : A \times I \to \mathbb{C},\ (\xi, t) \mapsto e^{it\xi}\,\varphi(t),$$

de sorte que

$$\widehat{\varphi} : A \to \mathbb{C},\ \xi \mapsto \int_I g(\xi, t)\,\mathrm{d}t.$$

∘ Clairement, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\xi \mapsto g(\xi, t)$ est continue sur A.
∘ De plus, pour tout $(\xi, t) \in A \times I$,

$$|e^{it\xi}\,\varphi(t)| = \varphi(t),$$

et l'on a vu à la question 2 que φ est intégrable sur $\mathbb{R}$ — ou bien on peut invoquer que c'est l'énoncé qui l'affirme puisque φ est une densité. Alors, g vérifie l'hypothèse de domination.

D'après le théorème évoqué,
- $\widehat{\varphi}$ est définie et continue sur A.

16. Utilisons les mêmes notations et appliquons le théorème de la classe $\mathscr{C}^1$ des intégrales dépendant d'un paramètre.
∘ Pour tout $t \in I$, $\xi \mapsto g(\xi, t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A. De plus, pour tout $\xi \in A$,

$$\frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi, t) = i\,t\,e^{it\xi}\,\varphi(t) = i\,t\,g(\xi, t).$$

∘ Pour tout $(\xi, t) \in A \times I$,

$$\left|\frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi, t)\right| = |t|\,\varphi(t),$$

et l'on sait depuis la question 2 que φ admet un moment d'ordre 1, c'est-à-dire que $t \mapsto t\varphi(t)$ est intégrable sur I. Donc $\frac{\partial g}{\partial \xi}$ vérifie l'hypothèse de domination.

Avec le théorème annoncé,
- $\widehat{\varphi}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A,
- et pour tout $\xi \in A$,

$$\widehat{\varphi}\,'(\xi) = \int_I \frac{\partial g}{\partial \xi}(\xi, t)\,\mathrm{d}t = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} t\,e^{it\xi}\,\varphi(t)\,\mathrm{d}t.$$

17. Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Comme à la question 4, faisons une intégration par parties, dont la justification est aussi immédiate qu'alors.

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}} e^{it\xi}\, t\, e^{-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[-e^{it\xi}\,e^{-\frac{1}{2}t^2}\Big]_{t=-\infty}^{+\infty} + \int_{\mathbb{R}} i\xi\, e^{it\xi}\, e^{-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + i\xi \int_{\mathbb{R}} e^{it\xi}\, e^{-\frac{1}{2}t^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Alors,

$$\widehat{\varphi}\,'(\xi) = -\xi\,\widehat{\varphi}(\xi).$$

18. Il s'ensuit que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$,

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(0)\, e^{-\frac{1}{2}\xi^2}.$$

Or

$$\widehat{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\,\mathrm{d}t = 1,$$

puisque φ est une densité. Alors

$$\widehat{\varphi}(\xi) = e^{-\frac{1}{2}\xi^2}.$$

19. Par définition, f est positive sur $\mathbb{R}_+$. Par opérations usuelles, elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. En outre, pour $x > 0$,

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\tfrac{1}{2}(\ln x)^2 - \ln x) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\ln x\,(\tfrac{1}{2}\ln x + 1)) \end{aligned}$$

Or

$$\lim_{x\to 0}(-\ln x) = +\infty \text{ et } \lim_{x\to 0}(\tfrac{1}{2}\ln x + 1) = -\infty,$$

donc par produit,

$$\lim_{x\to 0} -\ln x\,(\tfrac{1}{2}\ln x + 1) = -\infty,$$

et par composition des limites, comme $\lim_{y\to-\infty} e^y = 0$,

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0 = f(0),$$

et f est continue en 0.

Le changement de variable $\psi : x \mapsto e^x$ est bijectif et de classe $\mathscr{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$ donc f est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$ si et seulement si $f \circ \psi \cdot |\psi'|$ l'est sur $\mathbb{R}$; et si c'est le cas, leurs intégrales sont égales. Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f \circ \psi(x)\,|\psi'(x)| &= \frac{1}{e^x\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\, e^x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2} = \varphi(x), \end{aligned}$$

où l'on reconnait la densité gaussienne. Il s'ensuit d'une part que f est bien intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc sur $\mathbb{R}_+$ puisqu'elle est continue en 0 ; et d'autre part,

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}_+^*} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

Ainsi, f est une densité sur $\mathbb{R}_+$.

20. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour commencer, l'intégrande de I_n est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, par opérations usuelles. De plus, pour $x > 0$,

$$|x^n\, f(x) \sin(2\pi \ln x)| = x^n\, f(x)\, |\sin(2\pi \ln x)| \leqslant x^n\, f(x).$$

Comme l'énoncé admet que les moments de la densité f sont tous finis, $x \mapsto x^n\, f(x)$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc aussi l'intégrande de I_n.

Ainsi, l'intégrale I_n converge.

Utilisons le même changement de variable que ci-dessus. Comme on vient de prouver que l'intégrale I_n converge, d'après le théorème du changement de variable, la nouvelle intégrale que nous écrirons converge aussi, et le calcul suivant est justifié :

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^{+\infty} x^n\, f(x) \sin(2\pi \ln x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{nx}\, f(e^x) \sin(2\pi x)\, e^x\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{nx}\, e^{-\frac{1}{2}x^2} \sin(2\pi x)\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{nx}\, e^{-\frac{1}{2}x^2} e^{i2\pi x}\,\mathrm{d}x \right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(2\pi - in)x}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x \right). \end{aligned}$$

21. Avec la partie IV, notamment la propriété admise en fin de question 18, on en déduit que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i(2\pi - in)x}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \widehat{\varphi}(2\pi - in) = e^{-\frac{1}{2}(2\pi - in)^2} \\ &= e^{-\frac{1}{2}(4\pi^2 - n^2 - 4\pi i n)} \\ &= e^{-\frac{1}{2}(4\pi^2 - n^2) + 2i\pi n}, \\ &= e^{-\frac{1}{2}(4\pi^2 - n^2)} \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

puisque l'exponentielle est $2i\pi$-périodique.

Alors, $I_n = 0$.

22. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Par opérations usuelles, g_α est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, puisque le sinus est borné et que f tend vers 0 en 0, il en est de même pour g_α. On prolonge donc g_α par continuité en 0 en posant $g_\alpha(0) = 0$. Ainsi prolongée, g_α est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Pour le caractère positif, choisissons $\alpha \in [-1, 1]$: pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\sin(2\pi \ln x) \in [-1, 1]$, donc $\alpha \sin(2\pi \ln x) \in [-1, 1]$ et $1 + \alpha \sin(2\pi \ln x) \in [0, 2]$. Ainsi, g_α est positive sur $\mathbb{R}_+$ (on rappelle que $g_\alpha(0) = 0$).

Enfin, pour tout $x > 0$,

$$g_\alpha(x) = f(x) + \alpha\, f(x) \sin(2\pi \ln x).$$

On sait que f est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et l'on a vu à la question 20 que $x \mapsto f(x) \sin(2\pi \ln x)$ l'est aussi. Donc g_α est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ et l'on a, avec la question 21,

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty} g_\alpha(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \underbrace{\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x}_{=1} + \alpha \underbrace{\int_0^{+\infty} f(x) \sin(2\pi \ln x)\,\mathrm{d}x}_{=0} = 1. \end{aligned}$$

Ainsi, g_α est une densité sur $\mathbb{R}_+$.

Par un calcul analogue et toujours avec la question 21, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} m_n(g_\alpha) &= \int_0^{+\infty} x^n\, g_\alpha(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} x^n\, f(x)\,\mathrm{d}x + \alpha \int_0^{+\infty} x^n\, f(x) \sin(2\pi \ln x)\,\mathrm{d}x \\ &= m_n(f) + \alpha\, I_n = m_n(f). \end{aligned}$$

Pour tout $\alpha \in [-1, 1]$, g_α est une densité sur $\mathbb{R}_+$, distincte de f si $\alpha \neq 0$, et l'on a $m_n(g_\alpha) = m_n(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.