

# Corrigé du quatrième devoir de révision

NOTATIONS. Dans la partie I, pour faciliter les indices, numérotions les lignes et colonnes des matrices de 0 à  $n$ . Nous utiliserons aussi les coefficients du binôme généralisé, définis pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$  par  $\binom{\alpha}{0} = 1$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}.$$

**I.A.1.** Pour tout  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , la colonne  $j$  de  $M_n$  contient les coordonnées de

$$T_n(X^j) = (1+X)^j = \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} X^i = \sum_{i=0}^n \binom{j}{i} X^i,$$

$$\boxed{\text{donc } M_n = \left( \binom{j}{i} \right)_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2}.$$

**I.A.2.** En fait,  $M_n$  est triangulaire supérieure, avec des 1 =  $\binom{i}{i}$  sur la diagonale,

$$\boxed{\text{donc } M_n \in \text{GL}_{n+1}(\mathbb{C}).}$$

Clairement,  $T_n^{-1} : P \mapsto P(X-1)$ , donc sur le même principe que ci-dessus,

$$\boxed{M_n^{-1} = \left( (-1)^{j-i} \binom{j}{i} \right)_{(i,j) \in \llbracket 0, n \rrbracket^2}.$$

**I.B.1.** La famille  $(H_i)_{0 \leq i \leq n}$  est une base de  $\mathbb{C}_n[X]$ , car elle est échelonnée.

**I.B.2.**  $\boxed{\text{Si } j < 0,$

$$\begin{aligned} H_i(j) &= \frac{j(j-1)\cdots(j-i+1)}{i!} = \binom{j}{i} \\ &= (-1)^i \frac{(-j)(-j+1)\cdots(-j+i-1)}{i!} \\ &= \binom{-j+i-1}{i}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Si } 0 \leq j \leq i-1, H_i(j) = 0 = \binom{j}{i}.$$

$$\boxed{\text{Si } j \geq i, H_i(j) = \binom{j}{i}.$$

**I.C.1.** Soit  $0 \leq i \leq n$ . On a

$$\begin{aligned} P(i) &= \sum_{j=0}^n a_j H_j(i) = \sum_{j=0}^n a_j \binom{i}{j} \\ &= \sum_{j=0}^n (M_n)_{ji} a_j = \sum_{j=0}^n ({}^t M_n)_{ij} a_j, \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{d'où } \begin{pmatrix} P(0) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix} = {}^t M_n \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

**I.C.2.** Alors bien-sûr,

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = {}^t M_n^{-1} \begin{pmatrix} P(0) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix},$$

ce qui donne, pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,

$$\begin{aligned} \underline{a_i} &= \sum_{j=0}^n ({}^t M_n^{-1})_{ij} P(j) = \sum_{j=0}^n (M_n^{-1})_{ji} P(j) \\ &= \sum_{j=0}^n (-1)^{i-j} \binom{i}{j} P(j) \\ &= \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} P(j). \end{aligned}$$

Si  $i \geq n+1$ , on peut faire le même travail dans  $\mathbb{C}_i[X]$ , où l'on voit que  $\underline{\text{la somme demandée}}$  est la coordonnée de  $P$  selon  $H_i$ , laquelle est nulle puisque  $P \in \text{Vect}(H_0, \dots, H_n)$ .

**I.C.3.** D'après I.C.2,  $a) \Rightarrow b)$ .

D'après I.B.2, pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $H_i(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$ , donc puisque  $P = \sum_{i=0}^n a_i H_i$ ,  $b) \Rightarrow c)$ .

Bien-sûr,  $c) \Rightarrow a)$ .

$\underline{\text{Ainsi, } a), b) \text{ et } c) \text{ sont équivalentes.}}$

**I.D.** D'après I.C.2,  $a) \Rightarrow b)$ .

Supposons  $b)$ . Toujours d'après I.C.2, posons  $P = \sum_{i=0}^n a_i H_i$  où pour  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,

$$a_i = \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} u_j,$$

de sorte que

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = {}^t M_n^{-1} \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Alors, d'après I.C.1,

$$\begin{pmatrix} P(0) \\ \vdots \\ P(n) \end{pmatrix} = {}^t M_n \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_0 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tout  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $P(j) = u_j$ .

Alors, les suites  $(u_j)$  et  $(P(j))$  ont les mêmes premiers  $n+1$  termes et vérifient la même relation de récurrence :

$$\begin{aligned} \forall i \geq n+1, \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} u_j &= 0, & (b) \\ \sum_{j=0}^i (-1)^{i-j} \binom{i}{j} P(j) &= 0. & \text{(I.C.2)} \end{aligned}$$

D'après le principe de récurrence, ces suites sont égales, et  $b) \Rightarrow a)$ .

$\underline{\text{Ainsi, } a) \text{ et } b) \text{ sont équivalentes.}}$

*Commentaire.* On aurait aussi pu démontrer l'existence de  $P$  par l'interpolation de Lagrange.

**II.A.1.** Pour tout  $t \in [-\pi, \pi]$ ,

$$f(re^{it})e^{-ipt} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n e^{i(n-p)t}.$$

Or  $|a_n r^n e^{i(n-p)t}| = |a_n| r^n$  et  $\sum a_n r^n$  converge absolument puisque  $r \in [0, R[$ , donc la série de fonctions  $\sum (t \mapsto a_n r^n e^{i(n-p)t})$  converge normalement sur  $[-\pi, \pi]$  et on peut l'intégrer terme à terme :

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it})e^{-ipt} dt &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n-p)t} dt \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n 2\pi \delta_{np} = 2\pi a_p r^p. \end{aligned}$$

**II.A.2.** Voici un calcul formel que l'on justifiera ensuite.

$$\begin{aligned} |f(\omega)| &\stackrel{(1)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \omega^n = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n r^n \left(\frac{\omega}{r}\right)^n \\ &\stackrel{(2)}{=} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it}) e^{-int} dt \right) \left(\frac{\omega}{r}\right)^n \\ &\stackrel{(3)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it}) \left( \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-int} \left(\frac{\omega}{r}\right)^n \right) \frac{dt}{2\pi} \\ &\stackrel{(4)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it}) \frac{1}{1 - e^{-it} \frac{\omega}{r}} \frac{dt}{2\pi} \\ &\stackrel{(5)}{=} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it}) \frac{r e^{it}}{r e^{it} - \omega} \frac{dt}{2\pi}. \end{aligned}$$

Justifions le tout.

- (1) Par définition de  $f(\omega)$ .
- (2) L'idée est inspirée de la preuve du lemme d'Abel.
- (3) D'après II.A.1.
- (4) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $g_n : t \mapsto f(re^{it}) e^{-int} \left(\frac{\omega}{r}\right)^n$ . Pour tout  $t \in [-\pi, \pi]$ , on a

$$\begin{aligned} |g_n(t)| &= |f(re^{it})| \left(\frac{|\omega|}{r}\right)^n \\ &= \left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_k r^k e^{ikt} \right| \left(\frac{|\omega|}{r}\right)^n \\ &\leq \sum_{k=0}^{+\infty} |a_k| r^k \left(\frac{|\omega|}{r}\right)^n = \alpha_n. \end{aligned}$$

La somme est un nombre fixe, ne dépendant ni de  $n$  ni de  $t$ . Et par hypothèse  $|\omega|/r \in [0, 1[$ , donc  $\alpha_n$ , qui ne dépend pas de  $t$ , est le terme général d'une série géométrique convergente, donc la série de fonctions  $\sum g_n$  converge normalement sur  $[-\pi, \pi]$  : il est permis de l'intégrer terme à terme, ce qui justifie (4).

- (5) C'est la somme d'une série géométrique de raison  $e^{it} \frac{\omega}{r} \in D_1$  (avec les notations de l'énoncé).

**II.B.1.** Dire que  $z$  parcourt  $C_r$  revient à dire, en posant  $z = r e^{it}$ , que  $t$  décrit  $[-\pi, \pi]$ . La série entière  $\sum a_n z^n$  converge normalement sur  $C_r$ , donc la fonction  $t \mapsto f(re^{it})$  est continue sur  $[-\pi, \pi]$ , donc aussi la fonction  $t \mapsto |f(re^{it})|$ , par composition. Comme fonction réelle continue sur un segment, cette dernière est bornée et atteint ses bornes. En particulier, son maximum existe :  $\lfloor M_f(r) \text{ existe} \rfloor$ .

**II.B.2.** Pour tout  $t \in [-\pi, \pi]$ ,

$$\left| \frac{r e^{it}}{r e^{it} - \omega} \right| = \frac{r}{|r e^{it} - \omega|} \leq \frac{r}{r - |\omega|},$$

en minorant le dénominateur grâce à la seconde inégalité triangulaire. Alors, en partant de II.A.2,

$$\begin{aligned} \lfloor |f(\omega)| \rfloor &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it}) \frac{r e^{it}}{r e^{it} - \omega} \frac{dt}{2\pi} \right| \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{it})| \left| \frac{r e^{it}}{r e^{it} - \omega} \right| \frac{dt}{2\pi} \\ &\leq \int_{-\pi}^{\pi} M_f(r) \frac{r}{r - |\omega|} \frac{dt}{2\pi} \\ &= M_f(r) \frac{r}{r - |\omega|}. \end{aligned}$$

**II.B.3.** L'espace  $E_R$  est stable par produit, grâce au produit de Cauchy de deux séries entières, donc pour tout  $p \in \mathbb{N}$ ,  $f^p \in E_R$ . On peut donc appliquer le résultat précédent à  $f^p$ . En outre, par croissance sur  $\mathbb{R}_+$  de la fonction  $u \mapsto u^p$ ,

$$\begin{aligned} M_{f^p}(r) &= \max\{|f^p(z)|, z \in C_r\} \\ &= \max\{|f(z)|^p, z \in C_r\} \\ &= (\max\{|f(z)|, z \in C_r\})^p = (M_f(r))^p. \end{aligned}$$

Alors,

$$|f^p(\omega)| \leq M_{f^p}(r) \frac{r}{r - |\omega|} = (M_f(r))^p \frac{r}{r - |\omega|},$$

donc

$$|f(\omega)| \leq M_f(r) \left(\frac{r}{r - |\omega|}\right)^{1/p},$$

et en passant à la limite quand  $p$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\lfloor |f(\omega)| \rfloor \leq M_f(r).$$

**II.C.1.** Oui, car  $a_n \omega^{n-1-j} = \frac{1}{\omega^{j+1}} a_n \omega^n$  si  $\omega \neq 0$ , et sinon, c'est évident.

**II.C.2.** Puisque  $|\omega| < r$ , on a

$$\begin{aligned} \lfloor |b_j| \rfloor &\leq \sum_{n=j+1}^{+\infty} |a_n| r^{n-j-1} = \frac{1}{r^j} \frac{1}{r} \sum_{n=j+1}^{+\infty} |a_n| r^n \\ &\leq \frac{1}{r^j} \frac{1}{r} \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n}_{\text{cste indépendante de } j} = \underset{j \rightarrow +\infty}{\text{O}} \left(\frac{1}{r^j}\right). \end{aligned}$$

**II.C.3.** Soit  $z \in D_R$ . En choisissant  $r$  dans  $]\max\{|\omega|, |z|\}, R[$ , de sorte que  $r > |\omega|$  et  $r > |z|$ , mais  $r < R$ , on a

$$|b_j z^j| = |b_j| |z^j| = O\left(\frac{1}{r^j}\right) |z^j| = O\left(\frac{|z^j|}{r^j}\right).$$

Comme  $|z| < r$ , la série géométrique  $\sum (|z|/r)^j$  converge absolument, donc aussi  $\sum b_j z^j$ . Ainsi, pour tout  $z \in D_R$ ,  $\sum b_j z^j$  converge absolument,

donc le rayon de convergence de  $\sum b_j z^j$  est supérieur ou égal à  $R$ .

Soit  $z \in D_R$ .

$$\begin{aligned} (z - \omega)g(z) &= \sum_{j=0}^{+\infty} b_j z^{j+1} - \sum_{j=0}^{+\infty} \omega b_j z^j \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} b_{j-1} z^j - \sum_{j=0}^{+\infty} \omega b_j z^j \\ &= \sum_{j=1}^{+\infty} (b_{j-1} - \omega b_j) z^j - \omega b_0. \end{aligned}$$

D'une part,

$$\omega b_0 = \omega \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \omega^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \omega^n = f(\omega) - a_0.$$

D'autre part, pour  $j \geq 1$ ,

$$b_{j-1} - \omega b_j = \sum_{n=j}^{+\infty} a_n \omega^{n-j} - \sum_{n=j+1}^{+\infty} a_n \omega^{n-j} = a_j.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \underline{(z - \omega)g(z)} &= \sum_{j=1}^{+\infty} a_j z^j - f(\omega) + a_0 \\ &= \underline{f(z) - f(\omega)}. \end{aligned}$$

**II.D.1.** En appliquant ce qui précède à  $f$  en  $\omega = z_1$ , il existe une fonction  $g_1 \in E_R$  telle que sur  $D_R$ ,  $f(z) - f(z_1) = (z - z_1)g_1(z)$ , c'est-à-dire  $f(z) = (z - z_1)g_1(z)$ . Comme  $g_1(z_2) = 0$ , il existe donc  $g_2 \in E_R$  telle que sur  $D_R$ ,  $g_1(z) = (z - z_2)g_2(z)$  et  $f(z) = (z - z_1)(z - z_2)g_2(z)$ . Par une récurrence immédiate, il existe  $g_p \in E_R$  telle que sur  $D_R$ ,  $f(z) = g_p(z) \prod_{j=1}^p (z - z_j)$ . En multipliant de part et d'autre par  $\prod_{j=1}^p (r^2 - \bar{z}_j z)$ ,

il existe  $F \in E_R$  telle que sur  $D_R$ , on ait l'égalité voulue.

**II.D.2.** Pour  $z \in C_r \setminus \{z_j\}$ ,  $z\bar{z} = r^2$ , donc

$$\left| \frac{r^2 - \bar{z}_j z}{z - z_j} \right| = \left| \frac{z\bar{z} - \bar{z}_j z}{z - z_j} \right| = |z| \left| \frac{z - z_j}{z - z_j} \right| = r.$$

**II.D.3.** D'après II.B.3,

$$|F(0)| \leq M_F(r) = \max\{|F(z)|, z \in C_r\}.$$

D'après II.D.1, pour tout  $z$  dans  $C_r$ , éventuellement distinct des  $z_j$ , on a

$$|F(z)| = |f(z)| \prod_{j=1}^p \left| \frac{r^2 - \bar{z}_j z}{z - z_j} \right| = |f(z)| r^p,$$

d'après II.D.2. C'est encore vrai en les  $z_j$  par continuité, si besoin est. Alors  $M_F(r) = M_f(r) r^p$  et  $|F(0)| \leq M_f(r) r^p$ . Enfin,

$$F(0) \prod_{j=1}^p z_j = f(0) \prod_{j=1}^p r^2 = f(0) r^{2p}.$$

Alors

$$\underline{|f(0)| r^p} = \frac{|F(0)|}{r^p} \left| \prod_{j=1}^p z_j \right| \leq M_f(r) \left| \prod_{j=1}^p z_j \right|.$$

**II.D.4.** Puisque 0 est racine d'ordre au moins  $k$  de  $f$ , on peut écrire sur  $D_R$ ,

$$f(z) = \sum_{n=k}^{+\infty} a_n z^n = z^k \underbrace{\sum_{n=k}^{+\infty} a_n z^{n-k}}_{\varphi(z)},$$

où  $\varphi \in E_R$ . Appliquons-lui la question précédente, sachant que  $\varphi$  s'annule en les mêmes  $z_j$  que  $f$  :

$$|\varphi(0)| r^p \leq M_\varphi(r) \left| \prod_{j=1}^p z_j \right|.$$

Par ailleurs, si  $z \in C_r$ ,

$$|\varphi(z)| = \left| \frac{f(z)}{z^k} \right| = \frac{|f(z)|}{r^k},$$

d'où  $M_\varphi(r) = M_f(r)/r^k$ . Enfin,

$$\varphi(0) = a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \underline{\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} r^{p+k}} &\leq M_\varphi(r) r^k \left| \prod_{j=1}^p z_j \right| \\ &= \underline{M_f(r) \left| \prod_{j=1}^p z_j \right|}. \end{aligned}$$

**II.E.** Supposons que  $f$  n'est pas nulle. Alors il existe  $n \in \mathbb{N}$  tel que  $a_n \neq 0$ , donc  $f^{(n)}(0) \neq 0$ . Alors  $k = \min\{n \in \mathbb{N}, f^{(n)}(0) \neq 0\}$  existe. En appliquant II.D.4 à  $k$ ,  $r = p$ ,  $z_j = j$  pour  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on a

$$\frac{|f^{(k)}(0)|}{k!} p^{p+k} \leq M_f(p) p!$$

ou encore, quand  $p \rightarrow +\infty$ ,

$$\begin{aligned} |f^{(k)}(0)| &\leq k! p! p^{-p-k} M_f(p) \\ &\sim k! \sqrt{2\pi p} p^p e^{-p} p^{-p-k} O(c^p) \\ &= O\left(\frac{1}{p^{k-\frac{1}{2}}} \left(\frac{c}{e}\right)^p\right) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

car  $\frac{c}{e} < 1$  et  $k - \frac{1}{2} > 0$ . Cela contredit le fait que  $|f^{(k)}(0)| \neq 0$ .

Alors par l'absurde,  $f$  est la fonction nulle.

**III.A.1.** On peut écrire

$$F_n = \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_k}{X-k}.$$

Pour  $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,

$$(X-j)F_n = \lambda_j + (X-j) \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n \frac{\lambda_k}{X-k}.$$

En évaluant en  $X = j$ ,

$$\begin{aligned} \lambda_j &= \frac{n!}{\prod_{k=0}^{j-1} (j-k) \prod_{k=j+1}^n (j-k)} \\ &= \frac{n!}{j! (-1)^{n-j} (n-j)!} = (-1)^{n-j} \binom{n}{j}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Ainsi, } F_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{1}{X-k}.$$

**III.A.2.** D'après II.A.2 et ce qui précède,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{n! f(re^{it})}{(re^{it}-1) \cdots (re^{it}-n)} \frac{dt}{2\pi} \right| \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} r e^{it} f(re^{it}) F_n(re^{it}) \frac{dt}{2\pi} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} r e^{it} f(re^{it}) \sum_{k=0}^n \frac{\lambda_k}{r e^{it} - k} \frac{dt}{2\pi} \\ &= \sum_{k=0}^n \lambda_k \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r e^{it}}{r e^{it} - k} f(re^{it}) \frac{dt}{2\pi} \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k). \end{aligned}$$

**III.A.3.** D'après ce qui précède,

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k) \right| \\ &= \left| \int_{-\pi}^{\pi} \frac{n! f(re^{it})}{(re^{it}-1) \cdots (re^{it}-n)} \frac{dt}{2\pi} \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{n! |f(re^{it})|}{|re^{it}-1| \cdots |re^{it}-n|} \frac{dt}{2\pi} \\ & \leq \int_{-\pi}^{\pi} \frac{n! M_f(r)}{(r-1) \cdots (r-n)} \frac{dt}{2\pi} \\ & = \frac{n! M_f(r)}{(r-1) \cdots (r-n)}. \end{aligned}$$

**III.B.1.** Appliquons ce qui précède à  $r = 2n + 1$  :

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k) \right| \\ & \leq \frac{n!}{(2n)(2n-1) \cdots (n+1)} o\left(\frac{2^{2n+1}}{\sqrt{2n+1}}\right) \\ & = o\left(\frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{(2n)! \sqrt{2n}}\right) \\ & = o\left(\frac{2\pi n n^{2n} e^{-2n} 2^{2n+1}}{\sqrt{2\pi} 2n (2n)^{2n} e^{-2n} \sqrt{2n}}\right) = o(1). \end{aligned}$$

Cela signifie que la suite d'entiers

$$\left( \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k) \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

tend vers 0, donc elle est stationnaire nulle à partir d'un certain rang  $N$ .

**III.B.2.** Appliquons I.D à la suite  $(f(k))$  : il existe un polynôme  $P \in \mathbb{C}_{N-1}[X]$  tel que pour tout  $j \in \mathbb{N}$ ,  $f(j) = P(j)$ . Alors la fonction  $f - P$  est entière, nulle sur  $\mathbb{N}$ , et  $M_{f-P}(r) = o\left(\frac{2^r}{\sqrt{r}}\right) = O(2^r)$ , car  $P(r) \ll 2^r$ . Alors, en appliquant II.E, ce qui est permis puisque  $2 < e$ ,  $f - P = 0$ ,

donc  $f$  est polynomiale.