Notations

Soit $N \geq 2$ un entier. On munit l'espace $\mathbb{R}^N$ du produit scalaire canonique

$$\langle x \, , y\rangle = \sum_{i=1}^{N} x_i \, y_i$$

et de la norme associée $\|x\| = \langle x \, , x\rangle^{1/2}$.

On note $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre N à coefficients réels, $\mathcal{S}_N(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ le sous-espace vectoriel des matrices symétriques et $\mathcal{S}_N^+(\mathbb{R})$ l'ensemble (des matrices dites symétriques définies positives) défini de la façon suivante :

$$\mathcal{S}_N^+(\mathbb{R}) = \left\{ A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R}) \mid \langle Ax \, , x\rangle > 0 \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}^N \, , \; x \neq 0 \right\}.$$

Pour tout polynôme $P(X) = c_k X^k + c_{k-1} X^{k-1} + \cdots + c_0 \in \mathbb{R}[X]$ et toute matrice M dans $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, on note $P(M)$ la matrice

$$P(M) = c_k M^k + c_{k-1} M^{k-1} + \cdots + c_0 I_N \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R}),$$

où $I_N \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est la matrice identité.

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, on note M^T sa transposée.

On rappelle le théorème spectral : toute matrice $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ admet une base orthonormale de vecteurs propres. En particulier, si l'on note $\lambda_1 < \cdots < \lambda_d$ les d valeurs propres de A (distinctes deux à deux), et $F_1, \ldots, F_d$ les sous-espaces propres associés, $\mathbb{R}^N$ est somme directe orthogonale des F_i, c'est à dire que tout $x \in \mathbb{R}^N$ s'écrit de façon unique

$$x = \sum_{i=1}^{d} x_i,$$

où p_{F_i} est la projection orthogonale de $\mathbb{R}^N$ sur F_i .

Ce problème porte sur la résolution effective du problème $Ax = b$, où $A \in \mathcal{S}_N^+(\mathbb{R})$, plus précisément sur la construction et l'étude, à partir d'un vecteur initial x_0 arbitraire, d'une suite $x_0, x_1, \ldots, x_k, \ldots$ de $\mathbb{R}^N$, qui s'identifie à la solution $\bar{x}$ du système précédent au delà d'un certain rang, et telle que x_k se rapproche dans un certain sens de $\bar{x}$ en deça de ce rang.

Partie I

1. Soit $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathcal{S}_N^+(\mathbb{R})$ si et seulement si les valeurs propres de A sont toutes réelles strictement positives.

2. Pour toute matrice $B \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$, on pose

$$|||B||| = \sup_{\|x\|=1} \|Bx\|.$$

Après avoir justifié l'existence de $|||B|||$, montrer que $B \longmapsto |||B|||$ est une norme sur $\mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}^N \qquad \|Bx\| \leq |||B||| \|x\|.$$

3. Soit $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ une matrice de valeurs propres (non nécessairement distinctes) $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$. Montrer que

$$|||A||| = \max_{1 \leq i \leq N} |\lambda_i| \ .$$

4. Soit $A \in \mathcal{S}_N^+(\mathbb{R})$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, on pose

$$\|x\|_A = \langle x \ , Ax \rangle^{1/2}.$$

a) Montrer que l'application $x \longmapsto \|x\|_A$ est une norme sur $\mathbb{R}^N$.

b) Montrer qu'il existe des constantes C_1 et C_2 strictement positives, que l'on exprimera en fonction des valeurs propres de A, telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}^N \qquad C_1\|x\| \leq \|x\|_A \leq C_2\|x\|.$$

5. Soit $A \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ et soit $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme. Montrer que $P(A) \in \mathcal{S}_N(\mathbb{R})$ et préciser les valeurs propres et vecteurs propres de $P(A)$ en fonction de ceux de A.

6. Soit $A \in \mathcal{S}_N^+(\mathbb{R})$. On note $0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_d$ les d valeurs propres de A (distinctes deux à deux) et $F_1, \ldots, F_d$ les sous-espaces propres associés. On considère l'application linéaire de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$:

$$x \quad \longmapsto \quad \sum_{i=1}^{d} \lambda_i^{1/2} \, p_{F_i}(x),$$

où p_{F_i} est la projection orthogonale (pour le produit scalaire canonique) sur F_i. On note $A^{1/2}$ la matrice associée à cette application linéaire dans la base canonique.

a) On écrit $A = UDU^T$, où $D \in \mathcal{M}_N(\mathbb{R})$ est la matrice diagonale qui contient les valeurs propres de A dans l'ordre croissant, avec leurs ordres de multiplicité, et U une matrice orthogonale. On note $D^{1/2}$ la matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les racines carrées de ceux de D. Montrer que $A^{1/2} = UD^{1/2}U^T$.

b) Montrer que $A^{1/2} \in \mathcal{S}_N^+(\mathbb{R})$, que $A^{1/2}A^{1/2} = A$, et que $A^{1/2}$ commute avec A.

c) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$,

$$\|x\|_A = \|A^{1/2}x\|,$$

où $\|x\|_A$ est la norme définie à la question 4.

Partie II

Soit $A \in \mathcal{S}_N^+(\mathbb{R})$. On supposera dans toute la suite du problème que la matrice A n'est pas proportionnelle à l'identité.

On se donne $b \in \mathbb{R}^N$ et l'on note $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$ l'unique vecteur qui vérifie

$$A\bar{x} = b.$$

On se donne un vecteur $x_0 \in \mathbb{R}^N$, différent de $\bar{x}$, et l'on note $r_0 = b - Ax_0$. On pose $H_0 = \{0\}$ et, pour $k \geq 1$,

$$H_k = \{P(A)r_0 \mid P \in \mathbb{R}[X]\,,\ \deg(P) \leq k-1\}\,,$$

où $\deg(P) \in \mathbb{N}$ désigne le degré du polynôme P.

7. a) Montrer que les H_k forment une suite de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^N$, et montrer que $H_k \subset H_{k+1}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

b) Montrer qu'il existe nécessairement k tel que $H_{k+1} = K_k$. On note alors m le plus petit entier k tel que $H_{k+1} = K_k$.

c) Montrer que $\dim(H_k) = m$ pour tout $k \geq m$, et que $\dim(H_k) = k$ pour $k \leq m$.

8. On note d le nombre de valeurs propres distinctes de A.

a) Dans le cas particulier où r_0 est un vecteur propre de A, montrer que l'entier m de la question précédente est égal à 1.

b) Dans le cas général, montrer que m est inférieur ou égal à d.

c) Pour tout entier n entre 1 et d, construire un x_0 tel que l'entier m de la question 7 soit égal à n.

d) Montrer que l'ensemble des x_0 pour lesquels la dimension m est exactement égale à d est le complémentaire d'une union finie d'ensembles de la forme $\bar{x} + E$, où E est un espace vectoriel de dimension inférieure ou égale à $N - 1$.

9. Montrer qu'il existe un polynôme Q de degré m (entier défini dans la question 7) tel que $Q(A)e_0 = 0$, où $e_0 = x_0 - \bar{x}$.

10. Montrer que le polynôme Q de la question précédente vérifie $Q(0) \neq 0$.

11. On définit $x_0 + H_k$ comme le sous-ensemble des points de $\mathbb{R}^N$ de la forme $x_0 + x$, où x décrit l'espace vectoriel H_k.

a) Montrer que $\bar{x} \in x_0 + H_m$.

b) Montrer que, pour tout $k \in \{0, \ldots, m-1\}$, on a $\bar{x} \notin x_0 + H_k$.

Partie III

On garde dans cette partie les notations de la partie II.

On introduit l'application

$$\begin{array}{rcl} J\colon \mathbb{R}^N & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{2}\langle x \,,\, Ax\rangle - \langle b \,,\, x\rangle. \end{array}$$

12. Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, exprimer $\|x - \bar{x}\|_A^2 = \langle x - \bar{x} \,,\, A(x - \bar{x})\rangle$ en fonction de $J(\bar{x})$ et de $J(x)$ et en déduire que $\bar{x}$ est l'unique minimiseur de J sur $\mathbb{R}^N$, c'est-à-dire que $J(\bar{x}) \leqslant J(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, et que $\bar{x}$ est le seul point qui vérifie cette propriété.

13. Montrer que J admet un minimiseur unique sur le sous-ensemble $x_0 + H_k$ (défini à la question 11), quel que soit $k \in \mathbb{N}$.

14. On note x_k le minimiseur de la question précédente. Montrer que x_k s'identifie à la projection sur $x_0 + H_k$ de $\bar{x}$ pour la norme $\|\cdot\|_A$ associée à la matrice A (définie à la question 4), c'est-à-dire que

$$\|x_k - \bar{x}\|_A = \min_{x \in x_0 + H_k} \|x - \bar{x}\|_A.$$

On notera $r_k = b - Ax_k$ et $e_k = x_k - \bar{x}$. On remarquera que $r_k = -Ae_k$.

15. Montrer que $e_k \neq 0$ pour $k = 0, \ldots, m-1$, et que $e_k = 0$ pour $k \geq m$.

16. On rappelle que I_N est la matrice identité d'ordre N. Montrer que

$$\|e_k\|_A = \min \left\{ \|(I_N + AQ(A))e_0\|_A \mid Q \in \mathbb{R}[X] \,,\ \deg(Q) \leq k-1 \right\}.$$

17. Montrer que

$$\|e_k\|_A \leq \|e_0\|_A \min \left\{ |||I_N + AQ(A)||| \mid Q \in \mathbb{R}[X] \,,\ \deg(Q) \leq k-1 \right\},$$

où $|||\cdot|||$ est la norme matricielle définie dans la question 2.
(On pourra utiliser les propriétés sur $A^{1/2}$ démontrées à la question 6.)

18. On note λ_1 (respectivement λ_N) la plus petite (respectivement la plus grande) valeur propre de A, et l'on définit

$$\Lambda_k = \left\{ Q \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(Q) \leq k,\ Q(0) = 1 \right\}.$$

Montrer que

$$\|e_k\|_A \leq \|e_0\|_A \min_{Q \in \Lambda_k} \max_{t \in [\lambda_1, \lambda_N]} |Q(t)|.$$

Les questions qui suivent (de 19 à 23) portent sur la construction explicite d'un polynôme permettant de préciser la majoration précédente.

Soit k un entier positif ou nul. On définit la fonction f_k de l'intervalle $[-1, 1]$ dans lui-même par

$$f_k(x) = \cos\left(k \arccos x\right).$$

19. a) Développer l'expression $f_{k+1}(x) + f_{k-1}(x)$, et en déduire la relation

$$\forall x \in [-1,1] \qquad f_{k+1}(x) = 2x f_k(x) - f_{k-1}(x).$$

b) En déduire que f_k s'identifie sur $[-1,1]$ à un polynôme T_k, de degré k, de même parité que k.

20. On note arcosh la fonction réciproque du cosinus hyperbolique[1], définie de $[1,+\infty[$ dans $[0,+\infty[$. Montrer que

$$\forall x \in]-\infty,-1] \qquad T_k(x) = (-1)^k \cosh\left(k \operatorname{arcosh}(-x)\right).$$

21. On rappelle que A, par hypothèse énoncée au début de la partie II, n'est pas proportionnelle à l'identité. On pose

$$\omega_k = \frac{1}{T_k\left(-\frac{\lambda_N+\lambda_1}{\lambda_N-\lambda_1}\right)}.$$

Montrer que ω_k est bien défini, que le polynôme

$$Q_k(X) = \omega_k T_k\left(\frac{2X-\lambda_1-\lambda_N}{\lambda_N-\lambda_1}\right)$$

est élément de Λ_k (ensemble défini à la question 18), et que le maximum de $|Q_k(t)|$ sur $[\lambda_1,\lambda_N]$ est $|\omega_k|$.

22. On pose

$$\theta = \operatorname{arcosh}\left(\frac{\lambda_N+\lambda_1}{\lambda_N-\lambda_1}\right) > 0$$

et $\alpha = e^{-\theta}$. Montrer que α est une racine du polynôme

$$X^2 - 2\,\frac{\lambda_N+\lambda_1}{\lambda_N-\lambda_1}\,X + 1$$

et en déduire l'expression de α en fonction de la quantité

$$\beta = \frac{\lambda_N+\lambda_1}{\lambda_N-\lambda_1}.$$

23. On note $\kappa = \lambda_N/\lambda_1$. Montrer que le réel α de la question précédente vaut

$$\alpha = \frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}$$

et en déduire que

$$\|e_k\|_A = \|x_k - \bar{x}\|_A \leq 2\,\|e_0\|_A \left(\frac{\sqrt{\kappa}-1}{\sqrt{\kappa}+1}\right)^k.$$

1. On n'utilisera de cette notion, hors programme, que le fait que $\operatorname{arcosh}(1) = 0$, et $\cosh\left(\operatorname{arcosh}(-x)\right) = -x$ pour $x \in]-\infty,-1]$.

Partie IV

On garde les notations précédentes. En particulier, on note toujours x_k le minimiseur de J sur $x_0 + H_k$ (voir question 13).

24. Montrer qu'il existe une famille $(p_0, \ldots, p_{m-1})$ de vecteurs de $\mathbb{R}^N$ tels que

(i) Pour tout $k \in \{1, \ldots, m\}$, la famille $(p_0, \ldots, p_{k-1})$ est une base de H_k.

(ii) La famille est orthogonale pour le produit scalaire associé à A, c'est-à-dire que

$$\forall i\,,\ j \in \{0, \ldots, m-1\} \qquad i \neq j \Longrightarrow \langle Ap_i\,, p_j \rangle = 0.$$

25. On suppose connue une famille $(p_0, \ldots, p_{m-1})$ de vecteurs vérifiant les propriétés de la question précédente. Montrer que $x_{k+1} - x_k$ est alors colinéaire à p_k pour tout entier $k \in \{0, \ldots, m-1\}$.

26. On se donne $x_0 \in \mathbb{R}^N$. On considère les suites réelles finies (α_k) et (β_k), ainsi que les suites finies $(\tilde{x}_k)$, $(\tilde{r}_k)$ et $(\tilde{p}_k)$ d'éléments de $\mathbb{R}^N$, construites selon les relations de récurrence suivantes, pour $k \in \{0, \ldots, m-1\}$,

$$\begin{aligned}
\alpha_k &= \frac{\|\tilde{r}_k\|^2}{\langle A\tilde{p}_k\,, \tilde{p}_k \rangle}, \\
\tilde{x}_{k+1} &= \tilde{x}_k + \alpha_k \tilde{p}_k\,, \\
\tilde{r}_{k+1} &= \tilde{r}_k - \alpha_k A\tilde{p}_k\,, \\
\beta_k &= \frac{\|\tilde{r}_{k+1}\|^2}{\|\tilde{r}_k\|^2}, \\
\tilde{p}_{k+1} &= \tilde{r}_{k+1} + \beta_k \tilde{p}_k,
\end{aligned}$$

avec $\tilde{x}_0 = x_0$, $\tilde{r}_0 = b - Ax_0$ et $\tilde{p}_0 = \tilde{r}_0$.

Montrer que les propriétés suivantes sont vérifiées :

(i) Pour tout $k \in \{0, \ldots, m-1\}$, pour tout $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, on a

$$\langle \tilde{r}_i\,, \tilde{r}_k \rangle = 0\,,\ \langle \tilde{p}_i\,, \tilde{r}_k \rangle = 0\,,\ \langle \tilde{p}_i\,, A\tilde{p}_k \rangle = 0.$$

(ii) Pour tout $k \in \{0, \ldots, m\}$, $\tilde{x}_k$ s'identifie à x_k, le minimiseur de J sur H_k défini dans la question 13.

(iii) Pour tout $k \in \{0, \ldots, m\}$, $\tilde{r}_k$ s'identifie à $r_k = b - Ax_k$.

(iv) La famille $(\tilde{p}_0, \ldots, \tilde{p}_k)$ est une base de H_{k+1}, pour tout $k \in \{0, \ldots, m-1\}$.