

Corrigé du neuvième devoir de révision

1.a. Soit $t \in [0, 1]$. Sans difficulté,

$$\underline{p_{0,2}(t)} = \binom{2}{0} t^0 (1-t)^{2-0} = 1 - 2t + t^2,$$

$$\underline{p_{1,2}(t)} = \binom{2}{1} t^1 (1-t)^{2-1} = 2t - 2t^2,$$

$$\underline{p_{2,2}(t)} = \binom{2}{2} t^2 (1-t)^{2-2} = t^2.$$

1.b. Facilement,

$$\underline{A(t)} = (1-t)(0, 1) + t(1, 1) = (t, 1),$$

$$\underline{B(t)} = (1-t)(1, 1) + t(1, 0) = (1, 1-t),$$

$$\underline{C(t)} = (1-t)(t, 1) + t(1, 1-t) = (2t - t^2, 1 - t^2).$$

1.c. On a

$$\begin{aligned} \underline{\sum_{k=0}^2 p_{k,2}(t) A_k} &= (1 - 2t + t^2)(0, 1) \\ &\quad + (2t - 2t^2)(1, 1) + t^2(1, 0) \\ &= (2t - t^2, 1 - t^2) = \underline{C(t)}. \end{aligned}$$

2. Soient (x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans \mathcal{S} , et $t \in [0, 1]$.

D'une part,

$$\begin{aligned} &(1-t)(x_1, y_1) + t(x_2, y_2) \\ &= ((1-t)x_1 + tx_2, (1-t)y_1 + ty_2). \end{aligned}$$

En outre, $(1-t)x_1 + tx_2$ appartient à $[x_1, x_2]$ ou $[x_2, x_1]$, selon l'ordre de x_1 et x_2 , lequel segment est inclus dans $[0, 1]$. Donc $(1-t)x_1 + tx_2 \in [0, 1]$. De même pour $(1-t)y_1 + ty_2$.

D'autre part, comme $x_1 + y_1 \geq 1$ et $x_2 + y_2 \geq 1$, et que $t \geq 0$ et $1-t \geq 0$, on a

$$\begin{aligned} &(1-t)x_1 + tx_2 + (1-t)y_1 + ty_2 \\ &= (1-t)(x_1 + y_1) + t(x_2 + y_2) \\ &\geq (1-t) \cdot 1 + t \cdot 1 = 1. \end{aligned}$$

Donc $(1-t)(x_1, y_1) + t(x_2, y_2) \in \mathcal{S}$. Comme c'est vrai pour tous (x_1, y_1) et (x_2, y_2) dans \mathcal{S} et $t \in [0, 1]$,

\mathcal{S} est convexe.

3.a. Soit $t \in [0, 1]$. Comme $t(1-t) \geq 0$, on a

$$2t - t^2 + 1 - t^2 = 1 + 2t(1-t) \geq 1,$$

et $C(t) \in \mathcal{S}$. Ainsi, $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}$.

3.b. La tangente \mathcal{D}_t à \mathcal{C} en $C(t)$ est dirigée par le

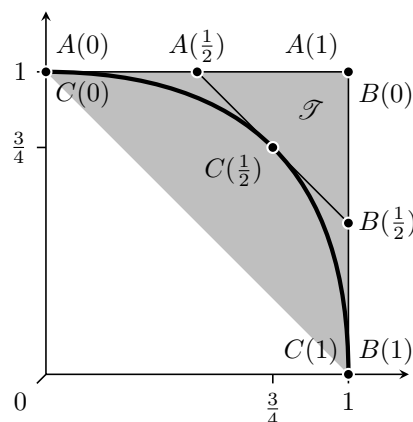
vecteur vitesse, $\left| \frac{d\vec{C}}{dt}(t) = 2(1-t, -t) \right.$

En passant, ce vecteur n'est jamais nul.

3.c. Oui, car $C(t) \in [A(t), B(t)]$ et

$$\frac{d\vec{C}}{dt}(t) = 2\overrightarrow{A(t)B(t)}.$$

3.d. Avec les résultats précédents, voici le graphe demandé, où le triangle \mathcal{S} est gris, et la courbe (épaisse) est un arc de parabole, et pas de cercle :



4.a. Le caractère linéaire de φ_n et B_n ne pose pas de difficulté.

On voit que $\varphi_n(1) = nX$; pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

$$\varphi_n(X^k) = (n-k)X^{k+1} + kX^k \in \mathbb{R}_n[X];$$

et enfin, $\varphi_n(X^n) = nX^k \in \mathbb{R}_n[X]$. Ainsi, les images par φ_n des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ sont toutes dans $\mathbb{R}_n[X]$, donc pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $\varphi_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $B_n(P)$ est une combinaison linéaire des $p_{k,n}$, tous de degré n , donc $\deg(B_n(P)) \leq n$ et $B_n(P) \in \mathbb{R}_n[X]$.

Enfin, φ_n et B_n sont bien des endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$.

4.b. Si $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$,

$$\begin{aligned} p'_{k,n}(X) &= \binom{n}{k} k X^{k-1} (1-X)^{n-k} \\ &\quad - \binom{n}{k} (n-k) X^k (1-X)^{n-k} \end{aligned}$$

puis

$$X(1-X)p'_{k,n}(X) = k(1-X)p_{k,n} - (n-k)Xp_{k,n}(X).$$

On vérifie que cette égalité est encore valable pour $k=0$ et pour $k=n$ ce qui permet d'obtenir, après simplification, $\underline{\varphi_n(p_{k,n}(X)) = kp_{k,n}(X)}$.

4.c. Pour tout entier k entre 0 et n , $p_{k,n}$ étant de plus non nul, c'est un vecteur propre associé à la valeur propre k . Ces valeurs propres étant deux à deux distinctes, on en déduit que la famille \mathcal{S} est libre. C'est de plus une famille de $n+1$ vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$ qui est de dimension $n+1$ donc \mathcal{S} est une base de $\mathbb{R}_n[X]$. C'est alors une base de $\mathbb{R}_n[X]$ composée de vecteurs propres de φ_n donc $\underline{\varphi_n}$ est diagonalisable.

4.d. En particulier 0 est valeur propre de φ_n donc

φ_n n'est pas bijectif.

Soit P dans le noyau de B_n . Comme la famille \mathcal{F} est libre, pour tout k entre 0 et n , $P(\frac{k}{n}) = 0$: P a donc au moins $n+1$ racines distinctes et est de degré au plus n donc P est le polynôme nul. Par conséquent, B_n est injectif ; il s'agit d'un endomorphisme dans un espace de dimension finie donc B_n est bijectif.

5.a. Considérons une pièce truquée qui donne pile avec la probabilité t et lançons-la successivement r fois. Alors, la variable aléatoire réelle X qui compte le nombre de fois que l'on obtient pile suit la loi binomiale $\mathcal{B}(r, t)$.

5.b. $T_r(\Omega) = \llbracket 0, r \rrbracket$ et, pour tout k entre 0 et r ,

$$\underline{P(T_r = k) = \binom{k}{r} t^k (1-t)^{r-k} = p_{k,r}(t).}$$

5.c. $E(T_r) = rt$ donc par linéarité, $E(\overline{T_r}) = t$.

$$\underline{V(T_r) = rt(1-t)} \text{ donc } \underline{V(\overline{T_r}) = \frac{t(1-t)}{r}.}$$

D'autre part, $V(T_r) = E(T_r^2) - (E(T_r))^2$ donc

$$\underline{\begin{cases} E(T_r^2) = rt(1-t+rt), \\ E((\overline{T_r})^2) = \frac{t(1-t+rt)}{r} = \left(1 - \frac{1}{r}\right)t^2 + \frac{1}{r}t. \end{cases}}$$

5.d. $T_r(\Omega) = \llbracket 0, r \rrbracket$ donc $\sum_{k=0}^r P(T_r = k) = 1$, c'est-à-dire $\sum_{k=0}^r p_{k,r}(t) = 1$.

D'après la formule de transfert rappelée dans l'énoncé avec $h : y \mapsto \frac{y}{r}$, $E(\overline{T_r}) = \sum_{k=0}^r \frac{k}{r} P(T_r = k)$ d'où $\sum_{k=0}^r \frac{k}{r} p_{k,r}(t) = t$.

En utilisant $E((\overline{T_r})^2)$ et $h : y \mapsto \frac{y^2}{r^2}$, on a aussi

$$\underline{\sum_{k=0}^r \left(\frac{k}{r}\right)^2 p_{k,r}(t) = \left(1 - \frac{1}{r}\right)t^2 + \frac{1}{r}t.}$$

5.e. Ces trois égalités sont des égalités entre polynômes, valables en une infinité de points donc en tout point t de \mathbb{R} (si, pour tout $t \in [0, 1]$, $P(t) = Q(t)$, alors le polynôme $P - Q$ a une infinité de racines donc il est nul).

6. On sait que $\mathbb{R}_2[X] = \text{Vect}(1, X, X^2)$ donc

$\mathbb{R}_2[X]$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.

En outre, $B_n(1) = 1$, $B_n(X) = X$ et $B_n(X^2) = (1 - \frac{1}{n})X^2 + \frac{1}{n}X$ donc B_n envoie une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}_2[X]$ est stable par B_n .

7. On obtient A_n en mettant, en colonnes, les coordonnées de $B_n(1)$, $B_n(X)$ et $B_n(X^2)$ dans la base $(1, X, X^2)$ donc

$$\underline{A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{n} \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{n} \end{pmatrix} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)I_3 + \frac{1}{n}H.}$$

8.a. On voit que $H^2 = H$, donc H est la matrice d'un projecteur, donc H est diagonalisable.

8.b. Q est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux non nuls donc Q est inversible.

8.c. En nommant e_1 et e_2 les deux premiers vecteurs de Q , on voit que $He_1 = e_1$ et $He_2 = e_2$. En outre on voit que les deux dernières colonnes C_2 et C_3 de H sont égales, donc $C_2 - C_3 = 0$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \text{Ker } H$.

Comme on veut que la troisième coordonnée de la troisième colonne de Q soit 1, prenons $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Alors, par construction

$$\underline{H = QDQ^{-1}, \text{ avec } a = 0 \text{ et } b = -1.}$$

9.a. Oui, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$.

9.b. Soient $(M_1, M_2) \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. Par propriété des opérations matricielles, $\psi(M_1 + \lambda M_2) = \psi(M_1) + \lambda \psi(M_2)$ donc

ψ est linéaire.

9.c. ψ est une application linéaire en dimension finie donc elle est continue : si $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} M_\ell = M$, alors $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \psi(M_\ell) = \psi(M)$ c'est-à-dire

$$\underline{\lim_{\ell \rightarrow +\infty} (QM_\ell Q^{-1}) = QMQ^{-1}.}$$

9.d. On a

$$\begin{aligned} \underline{A_n} &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)I_3 + \frac{1}{n}H \\ &= \left(1 - \frac{1}{n}\right)QI_3Q^{-1} + \frac{1}{n}QDQ^{-1} \\ &= Q\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)I_3 + \frac{1}{n}D\right)Q^{-1} \\ &= \underline{QD_nQ^{-1}.} \end{aligned}$$

9.e. Pour $n \geq 2$, $0 \leq 1 - \frac{1}{n} < 1$ donc

$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^\ell = 0$ et $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} D_n^\ell = D$. D'après la question 9.c, $\lim_{\ell \rightarrow +\infty} A_n^\ell = QDQ^{-1} = H$.

9.f. Ici, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = e^{-1}$ donc

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n^n &= Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix} Q^{-1} \\ &= Q(e^{-1}I_3 + (1 - e^{-1})D)Q^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 - e^{-1} \\ 0 & 0 & e^{-1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

10.a. Comme $V(Y) \geq 0$ et que $V(Y) = E(Y^2) - E(Y)^2$, on a $E(Y^2) \geq E(Y)^2$. Par croissance de la racine carrée, $|E(Y)| \leq \sqrt{E(Y^2)}$ et, pour tout réel x , $x \leq |x|$ donc $|E(Y)| \leq \sqrt{E(Y^2)}$.

10.b. On applique ce qui précède à $Y = |t - \overline{T_n}|$. Comme $E(\overline{T_n}) = t$, $E(Y^2) = V(\overline{T_n}) = \frac{t(1-t)}{n}$ d'après la question 5, donc $|E(|t - \overline{T_n}|)| \leq \sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}$.

11.a. f est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$ donc f' est continue sur le segment $[0, 1]$: elle y est donc bornée et $\|f'\|_\infty^{[0,1]}$ est bien définie. D'après l'inégalité des accroissements finis, en posant $M_f = \|f'\|_\infty^{[0,1]}$,

$$|\forall (a, b) \in [0, 1]^2, |f(a) - f(b)| \leq M_f |a - b|.$$

11.b. Soit $t \in [0, 1]$. D'après la question précédente, pour tout $\omega \in \Omega$, $|f(t) - f(\overline{T_n}(\omega))| \leq M_f |t - \overline{T_n}|$ ($\overline{T_n}$ ne prend que des valeurs dans $[0, 1]$). Par croissance et linéarité de l'espérance, on a $E(|f(t) - f(\overline{T_n})|) \leq M_f E(|t - \overline{T_n}|)$ et, avec la question 10.b,

$$E(|f(t) - f(\overline{T_n})|) \leq M_f \sqrt{\frac{t(1-t)}{n}}.$$

11.c. Pour $t \in [0, 1]$, $t(1-t) = \frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - t)^2 \leq \frac{1}{4}$ donc, en utilisant la question précédente et la remarque de l'énoncé (début de partie 3),

$$|\forall t \in [0, 1], |f(t) - B_n(f)(t)| \leq \frac{M_f}{2\sqrt{n}}.$$

11.d. On a majoré $|f - B_n(f)|$ par un majorant indépendant de t qui tend vers 0 avec n donc

$$\boxed{\text{la suite } (B_n(f)) \text{ converge uniformément vers } f \text{ sur } [0, 1].}$$

12. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n(f)$ est une fonction continue sur le segment $[0, 1]$ et la suite de fonctions $(B_n(f))_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers f donc le théorème d'intégration sur un segment s'applique :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 B_n(f)(x) dx = \int_0^1 f(x) dx.$$

13.a. Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Les fonctions $x \mapsto x^a$ et $x \mapsto (1-x)^{b+1}$ sont de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$. Donc, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^a (1-x)^b dx &= \left[-\frac{1}{b+1} x^a (1-x)^{b+1} \right]_0^1 \\ &\quad + \frac{a}{b+1} \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b+1} dx. \end{aligned}$$

Comme $a \geq 1$ et $b+1 \geq 1$, le crochet est nul et

$$\int_0^1 x^a (1-x)^b dx = \frac{a}{b+1} \int_0^1 x^{a-1} (1-x)^{b+1} dx.$$

13.b. Soit k entre 1 et n . La question précédente avec $a = k$ et $b = n - k$ donne

$$\begin{aligned} \int_0^1 p_{k,n}(x) dx &= \binom{n}{k} \frac{k}{n-k+1} \int_0^1 x^{k-1} (1-x)^{n-k+1} dx \\ &= \binom{n}{k-1} \int_0^1 x^{k-1} (1-x)^{n-k+1} dx \\ &= \int_0^1 p_{k-1,n}(x) dx. \end{aligned}$$

On en déduit que l'intégrale $\int_0^1 p_{k,n}(x) dx$ ne dépend pas de k entre 0 et n . En particulier, elle vaut

$$\int_0^1 p_{n,n}(x) dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{1}{n+1}.$$

Finalement, pour tout k entre 0 et n ,

$$\int_0^1 p_{k,n}(x) dx = \frac{1}{n+1}.$$

13.c. Par linéarité de l'intégrale de fonctions continues sur un segment,

$$\int_0^1 B_n(f)(x) dx = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \int_0^1 p_{k,n}(x) dx;$$

donc avec la question précédente,

$$\int_0^1 B_n(f)(x) dx = S_n(f).$$

Avec la question 12, on conclut donc que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = \int_0^1 f(x) dx.$$

14. On suppose maintenant que f est continue sur $[0, 1]$. f est continue en 1 donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} f(1) = 0$

et $S_n(f) \sim \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$. On reconnaît alors la suite des sommes de Riemann associée à la fonction continue f sur le segment $[0, 1]$ et on retrouve

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(f) = \int_0^1 f(x) dx.$$

15.a. Soit $x \in [0, 1]$ et $f : u \mapsto \frac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c}$.

a, b et c sont des entiers naturels donc f est continue sur $[0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions continues sur cet intervalle.

Quand u tend vers l'infini, $f(u) \sim \frac{1}{u^{c-a-b}}$; or $c - a - b \geq 2 > 1$ donc la fonction $u \mapsto \frac{1}{u^{c-a-b}}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$. Par comparaison, f l'est aussi.

Ainsi, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c} du$ converge.

15.b. Posons $A = [0, 1]$, $I = [0, +\infty[$ et

$$g : A \times I \rightarrow \mathbb{R}, (x, u) \mapsto \frac{u^a(1+xu)^b}{(1+u)^c}.$$

o Pour tout $u \in I$, la fonction $x \mapsto g(x, u)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur A (car $b \geq 1$). De plus, pour tout $(x, u) \in A \times I$,

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x, u) = \frac{bu^{a+1}(1+xu)^{b-1}}{(1+u)^c}.$$

o Pour tout $x \in A$, la fonction $u \mapsto g(x, u)$ est continue par morceaux sur I et intégrable (question précédente).

o Pour tout $x \in A$, $u \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, u)$ est continue par morceaux sur I car $b - 1 \geq 0$.

o Pour $(x, u) \in A \times I$, $0 \leq 1 + xu \leq 1 + u$ donc, comme $b - 1 \geq 0$,

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, u) \right| \leq \frac{bu^{a+1}(1+u)^{b-1}}{(1+u)^c} = \varphi(u).$$

φ est continue par morceaux et positive sur I et, quand u tend vers l'infini, $\varphi(u) \sim \frac{b}{u^{c-a-b}}$ avec $c - a - b > 1$ donc φ est intégrable sur I .

D'après le théorème de la classe \mathcal{C}^1 des intégrales à paramètre,

- pour tout $x \in A$, $u \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(x, u)$ est intégrable sur I ;
- F est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1]$;
- et pour tout $x \in A$,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial g}{\partial x}(x, u) du \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{bu^{a+1}(1+xu)^{b-1}}{(1+u)^c} du. \end{aligned}$$

15.c. Par opérations usuelles, h est de classe \mathcal{C}^1 sur $[0, 1[$. De plus, pour $t \in [0, 1[$, $h'(t) = \frac{1}{(1-t)^2} > 0$ donc h croît strictement. Il s'ensuit que

h réalise une bijection de $[0, 1[$ dans $h([0, 1]) = [0, +\infty[$.

15.d. Comme h est de classe \mathcal{C}^1 et bijective, on peut utiliser le changement de variable $u = \frac{t}{1-t}$. On

obtient alors

$$\begin{aligned} \underline{F(0)} &= \int_0^{+\infty} \frac{u^a}{(1+u)^c} du \\ &= \int_0^{+\infty} t^a(1-t)^{c-a-2} dt \\ &= \frac{1}{\binom{c-2}{a}} \int_0^1 p_{a, c-2}(t) dt = \frac{1}{\binom{c-2}{a}} \frac{1}{c-1}. \end{aligned}$$

De même,

$$\underline{F(1)} = \int_0^{+\infty} \frac{u^a}{(1+u)^{c-b}} du = \frac{1}{\binom{c-b-2}{a}} \frac{1}{c-b-1}.$$

16. Pour $n \geq k$, $\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}$.

Les entiers $n, n-1, \dots, n-k+1$ sont k termes équivalents à n . k est fixé donc, par produit, $\binom{n}{k} \sim \frac{n^k}{k!}$ quand n tend vers l'infini. En multipliant par $t^k(1-t)^{n-k}$, on obtient, pour $t \in]0, 1[$,

$$\underline{f_n(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^k}{k!} \left(\frac{t}{1-t}\right)^k (1-t)^n}.$$

17. Soit $t \in [0, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 0$ donc la série $\sum f_n(0)$ converge. Si $n > k$, $f_n(1) = 0$ donc la série $\sum f_n(1)$ converge. Pour

$t \in]0, 1[$, on pose $u_n(t) = \frac{n^k}{k!} \left(\frac{t}{1-t}\right)^k (1-t)^n$.

$u_n(t) > 0$ et $\frac{u_{n+1}(t)}{u_n(t)} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k (1-t)$ donc

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}(t)}{u_n(t)} = 1-t < 1$. D'après la règle de d'Alembert, la série $\sum u_n(t)$ converge. Par comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum f_n(t)$ converge.

Ainsi, la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[0, 1]$.

18. Clairement, $\underline{S(0) = 0}$ et $\underline{S(1) = f_k(1) = 1}$.

19.a. Pour tout $u \in]-1, 1[$, $\frac{1}{1-u} = \sum_{n=0}^{+\infty} u^n$.

19.b. On dérive k fois cette égalité : pour tout $u \in [0, 1[$,

$$\underline{\sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)u^{n-k} = \frac{k!}{(1-u)^{k+1}}}.$$

19.c. Soit $t \in]0, 1]$. En utilisant la définition de $f_n(t)$ et la question précédente,

$$\begin{aligned} \underline{S(t)} &= \sum_{n=k}^{+\infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} t^k (1-t)^{n-k} \\ &= \frac{t^k}{(1-(1-t))^{k+1}} = \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

19.d. Comme les f_n sont continues sur $[0, 1]$ mais que la somme $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ ne l'est pas, la série de fonctions ne converge pas uniformément sur $[0, 1]$, donc pas non plus normalement.