Corrigé du premier devoir surveillé

Questions de cours

Voir le cours (si :-)

Premier exercice

1. Soit $\theta \in [0, 2\pi[$. On a

$$u = e^{i\theta/2}(e^{-i\theta/2} + e^{i\theta/2}) = 2\cos(\tfrac{\theta}{2})\, e^{i\theta/2}.$$

Ainsi, $|u| = 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|$.

Si $\theta = \pi$, $u = 0$ et l'argument n'est pas défini.

Si $\theta \in [0, \pi[$, $|u| = 2\cos\frac{\theta}{2}$ donc $\operatorname{Arg} u = \frac{\theta}{2}$.

Si $\theta \in]\pi, 2\pi[$, $|u| = -2\cos\frac{\theta}{2}$, donc

$$u = -2\cos(\tfrac{\theta}{2})(-e^{i\theta/2}) = -2\cos(\tfrac{\theta}{2})\, e^{i\pi}\, e^{i\theta/2}$$

d'où $\operatorname{Arg} u = \frac{\theta}{2} + \pi$. Ici, on a choisi la détermination de l'argument dans $[0, 2\pi[$. Si l'on choisit celle dans $]-\pi, \pi]$, il suffit de dire $-1 = e^{-i\pi}$ et $\operatorname{Arg} u = \frac{\theta}{2} - \pi$.

Variante. Si $z \notin \mathbb{R}_-$, son argument dans $]-\pi, \pi[$ est donné par

$$\operatorname{Arg} z = 2\operatorname{Arctan}\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|},$$

ce qui donne ici, pour $\theta \neq \pi$,

$$\operatorname{Arg} u = 2\operatorname{Arctan}\frac{\sin\theta}{1 + \cos\theta + 2\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|}.$$

Commentaire. L'intérêt de cette expression est qu'elle est valable dans tous les cas. L'inconvénient est bien-sûr qu'elle est plus lourde.

2.1.1. Sans difficulté, en développant avec le binôme de Newton, sachant que $i^2 = -1$,

$$\begin{aligned}
(X+i)^3 &= X^3 + 3iX^2 + 3i^2X + i^3 \\
&= X^3 + 3iX^2 - 3X - i, \\
(X-i)^3 &= X^3 - 3iX^2 - 3X + i, \\
(X+i)^5 &= X^5 + 5iX^4 + 10i^2X^3 + 10i^3X^2 \\
&\quad + 5i^4X + i^5 \\
&= X^5 + 5iX^4 - 10X^3 - 10iX^2 + 5X + i, \\
(X-i)^5 &= X^5 - 5iX^4 - 10X^3 + 10iX^2 + 5X - i,
\end{aligned}$$

donc $P_1 = 3X^2 - 1$ et $P_2 = 5X^4 - 10X^2 + 1$.

2.1.2. Clairement, $\deg(P_2) = 2$ et $\deg(P_2) = 4$.

De plus $P_1 = 3(X - \frac{1}{\sqrt{3}})(X + \frac{1}{\sqrt{3}})$ et

P_1 est scindé sur $\mathbb{R}$ et n'est donc pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

Enfin, les polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ ont un degré inférieur ou égal à 2, donc

P_2 n'est pas irréductible dans $\mathbb{R}[X]$.

2.2.1. Comme plus haut, en développant par le binôme de Newton,

$$\begin{aligned}
(X+i)^{2n+1} &= X^{2n+1} + (2n+1)\,i\,X^{2n} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{2n-1}\binom{2n+1}{k} i^{2n+1-k} X^k \\
(X-i)^{2n+1} &= X^{2n+1} - (2n+1)\,i\,X^{2n} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{2n-1}\binom{2n+1}{k} (-i)^{2n+1-k} X^k
\end{aligned}$$

donc, sachant que $-(-1)^{2n+1-k} = (-1)^k$,

$$\begin{aligned}
P_n(X) &= (2n+1)X^{2n} \\
&\quad + \sum_{k=0}^{2n-1}\binom{2n+1}{k}\frac{1+(-1)^k}{2}\, i^{2n-k} X^k.
\end{aligned}$$

Les sommes ne comportent que des monômes de degré strictement inférieur à $2n$, donc

P_n est de degré $2n$ et de coefficient dominant $2n+1$.

2.2.2. L'ensemble des racines N^{es} de l'unité est

$\left\{e^{2ik\pi/N} \mid k \in [\![0, N-1]\!]\right\}$.

2.2.3. On a

$$P_n(i) = \frac{(2i)^{2n+1}}{2i} = (2i)^{2n} = (-4)^n.$$

2.2.4. Si un complexe z est racine de P_n, $(z+i)^{2n+1} = (z-i)^{2n+1}$ donc $|z+i| = |z-i|$. Cela signifie que z est à égale distance de i et de $-i$, donc qu'il est sur la médiatrice du segment reliant i et $-i$, c'est-à-dire l'axe réel.

2.2.5. Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine de P_n. Alors

$$(a+i)^{2n+1} = (a-i)^{2n+1}.$$

Mais on a vu que i n'est pas racine de P_n, donc $a \neq i$ et l'on peut dire

$$\frac{(a+i)^{2n+1}}{(a-i)^{2n+1}} = 1$$

ou encore

$$\left(\frac{a+i}{a-i}\right)^{2n+1} = 1.$$

Ainsi, $\frac{a+i}{a-i}$ est une racine $(2n+1)^{\text{e}}$ de l'unité et il existe $k \in [\![0, 2n]\!]$ tel que

$$\frac{a+i}{a-i} = e^{2ik\pi/(2n+1)},$$

d'où

$$a(e^{2ik\pi/(2n+1)} - 1) = i(e^{2ik\pi/(2n+1)} + 1).$$

L'éventualité où $k = 0$ n'est pas possible, car elle amènerait à l'égalité $a \cdot 0 = 2i$, qui est fausse : donc $k \in [\![1, 2n]\!]$.

« Remonter » les calculs ne présente pas de difficulté, donc la réciproque est aussi vraie. D'où l'équivalence demandée.

2.2.6. Ainsi,

$$\begin{aligned} a &= i\,\frac{e^{2ik\pi/(2n+1)}+1}{e^{2ik\pi/(2n+1)}-1} \\ &= i\,\frac{e^{ik\pi/(2n+1)}\left(e^{ik\pi/(2n+1)}+e^{-ik\pi/(2n+1)}\right)}{e^{ik\pi/(2n+1)}\left(e^{ik\pi/(2n+1)}-e^{-ik\pi/(2n+1)}\right)} \\ &= i\,\frac{2\cos\frac{k\pi}{2n+1}}{2\,i\sin\frac{k\pi}{2n+1}} = \frac{1}{\tan\frac{k\pi}{2n+1}}. \end{aligned}$$

Puisque k parcourt $[\![1,2n]\!]$, nous avons $2n$ racines. Or P_{2n} est de degré $2n$, donc il n'en admet pas d'autre.

L'ensemble des racines de P_n est donc

$$\left\{\frac{1}{\tan\frac{k\pi}{2n+1}}\;\middle|\;k\in[\![1,2n]\!]\right\}.$$

Et l'on retrouve qu'elles sont toutes réelles.

2.2.7. En développant explicitement avec la formule du binôme de Newton,

$$P_n(X) = \frac{1}{2i}\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k} i^k\,(1-(-1)^k)\,X^{2n+1-k}.$$

Seuls restent les termes où k est impair, que l'on renomme alors $2j+1$.

$$\begin{aligned} P_n(X) &= \frac{1}{2i}\sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2j+1} i^{2j+1}\,2\,X^{2n-2j} \\ &= \sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2j+1}(-1)^j\,X^{2(n-j)} \\ &= Q_n(X^2) \end{aligned}$$

en posant

$$Q_n(X) = \sum_{j=0}^{n}\binom{2n+1}{2j+1}(-1)^j\,X^{n-j}.$$

2.2.8. Sans difficulté, d'après la question 2.1.1, et ces expressions correspondent à la formule ci-dessus,

$Q_1(X) = 3X-1$ et $Q_2(X) = 5X^2-10X+1.$

Q_1 s'annule en $\frac{1}{3}$ et Q_2 en $1\pm\frac{2}{5}\sqrt{5}$.

2.2.9. En nommant x_k les racines de P_n, celles de Q_n sont les x_k^2. Mais pour $k\in[\![1,n]\!]$, grâce au caractère π-périodique de la fonction tangente,

$$x_{2n+1-k} = \frac{1}{\tan\frac{(2n+1-k)\pi}{2n+1}} = -\frac{1}{\tan\frac{k\pi}{2n+1}} = -x_k,$$

donc $x_{2n+1-k}^2 = x_k^2$. Ainsi, à partir des $2n$ racines de P_n, on trouve bien n racines de Q_n.

L'ensemble des racines de Q_n est donc

$$\left\{\frac{1}{\tan^2\frac{k\pi}{2n+1}}\;\middle|\;k\in[\![1,n]\!]\right\}.$$

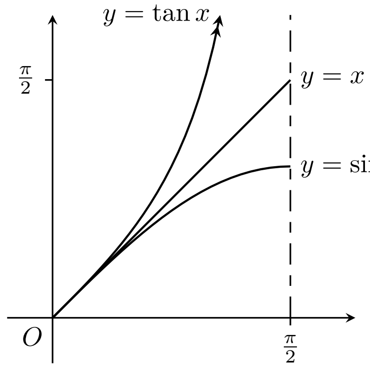
3. On voit que S_n est la somme des racines de Q_n. Or les deux termes de plus hauts degrés de Q_n sont

$$(2n+1)\,X^n \text{ et } -\frac{(2n+1)\,(2n)\,(2n-1)}{3!}\,X^{n-1}.$$

D'après les relations coefficients-racines, on peut affirmer que S_n est l'opposé du quotient de ces deux coefficients :

$$S_n = \frac{n\,(2n-1)}{3}.$$

4. Voici un graphe des fonctions sin, identité et tan.



Pour démontrer ces inégalités, par croissance de l'intégrale, il suffit d'intégrer entre 0 et $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ les inégalités immédiates suivantes :

$$0\leqslant\cos x\leqslant 1\leqslant 1+\tan^2 x,$$

reliant les dérivées des fonctions voulues.

VARIANTE. Voici une preuve grâce à la convexité.

La fonction tangente est convexe sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, car sa dérivée $x\mapsto 1+\tan^2 x$ y croît. Donc sa courbe représentative est au dessus de ses tangentes. En particulier, puisque la tangente à l'origine est la première bissectrice, pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\tan x\geqslant x$.

De même, la fonction sinus est concave sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, car sa dérivée $x\mapsto\cos x$ y décroit. Donc sa courbe représentative est au dessous de ses tangentes. En particulier, puisque la tangente à l'origine est aussi la première bissectrice, pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, $\sin x\leqslant x$.

Pour $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$, en prenant les inverses,

$$0\leqslant\frac{1}{\tan x}\leqslant\frac{1}{x}\leqslant\frac{1}{\sin x},$$

et puisque ces nombres sont positifs, en élevant au carré,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan^2 x}\leqslant\frac{1}{x^2}&\leqslant\frac{1}{\sin^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^2 x} = 1+\frac{1}{\tan^2 x}. \end{aligned}$$

5. Comme série de Riemann d'exposant $2>1$, la série $\sum 1/k^2$ converge.

D'après la question précédente, pour $x\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$,

$$\frac{1}{x^2}\geqslant\frac{1}{\tan^2 x}.$$

En particulier, si $k\in[\![1,n]\!]$, $\frac{k\pi}{2n+1}\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ et

$$\frac{1}{(\frac{k\pi}{2n+1})^2}\geqslant\frac{1}{\tan^2\frac{k\pi}{2n+1}}.$$

En ajoutant ces inégalités membre à membre,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(\frac{k\pi}{2n+1})^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\tan^2\frac{k\pi}{2n+1}} = S_n = \frac{n\,(2n-1)}{3}$$

d'où

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\geqslant\frac{n\,(2n-1)}{(2n+1)^2}\,\frac{\pi^2}{3}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{\pi^2}{6}.$$

De la même façon,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(\frac{k\pi}{2n+1})^2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{1}{\tan^2 \frac{k\pi}{2n+1}}\right)$$

donc

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leqslant \frac{n\,\pi^2}{(2n+1)^2} + \frac{n\,(2n-1)}{(2n+1)^2}\,\frac{\pi^2}{3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6}.$$

D'après le théorème d'encadrement,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi^2}{6},$$

ce qui signifie que

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.}$$

Deuxième exercice

I.1.a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leqslant \dfrac{1}{n\,2^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$. Or $\sum_{n\geqslant 1} 1/2^n$ converge comme série géométrique de raison $\frac{1}{2} \in [0,1[$. Donc par majoration,

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\,2^n} \text{ converge.}}$$

I.1.b.* Le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$ est

$$\boxed{\forall x \in \,]-1,1[\,,\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n}.}$$

Il a pour rayon de convergence 1. En particulier, pour $x = -\frac{1}{2}$,

$$\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\,\frac{(-1/2)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,2^n}$$

ou encore

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,2^n} = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \ln(2).}$$

I.2. Sur le même principe, $\dfrac{1}{n\,(n+1)\,2^n} \leqslant \dfrac{1}{2^n}$ donc toujours par majoration

$$\boxed{\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n\,(n+1)\,2^n} \text{ converge.}}$$

On décompose en éléments simples :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,(n+1)\,2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,2^n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\,2^n}$$

Cette séparation est licite car les deux nouvelles séries convergent, dont le terme général est majoré par $1/2^n$ à chaque fois. Alors

$$\begin{aligned}\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,(n+1)\,2^n}} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,2^n} - 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)\,2^{n+1}} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,2^n} - 2\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n\,2^n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,2^n} - 2\left(\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\,2^n} - \frac{1}{2}\right) \\ &\boxed{= 1 - \ln(2).}\end{aligned}$$

I.3.a. D'après le théorème spécial des séries alternées,

$$\boxed{\text{la série alternée } \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n} \text{ converge}}$$

car la valeur absolue de son terme général tend vers 0 en décroissant.

I.3.b.* Grâce au développement en série entière précédent, en remplaçant x par 1, on aimerait pouvoir dire

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(1+1) = \ln(2).$$

Mais justement, le rayon de convergence de ce développement en série entière est 1, donc il n'est à priori valide que pour $x \in \,]-1,1[$.

Cependant, on vient de voir que le développement en série entière converge pour $x = 1$. De plus, pour tout $x \in [0,1]$, grâce au théorème spécial des séries alternées, on peut majorer le reste pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^{k-1}\,\frac{x^k}{k}\right| \leqslant \left|(-1)^{n+1-1}\,\frac{x^{n+1}}{n+1}\right| = \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

Ainsi, nous venons de majorer le reste du développement en série entière indépendamment de x, par un terme qui tend vers 0. Alors, la suite des restes, comme suite de fonctions, converge uniformément sur $[0,1]$ vers la fonction nulle, ce qui signifie que le développement en série entière, comme série de fonctions, converge uniformément sur $[0,1]$. Donc sa somme est une fonction continue sur $[0,1]$: en particulier, on peut passer à la limite en 1^- :

$$\begin{aligned}\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}} &= \lim_{x\to 1^-} \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1}\,\frac{x^n}{n} \\ &= \lim_{x\to 1^-} \ln(1+x) \boxed{= \ln(2).}\end{aligned}$$

I.4.a. En multipliant par les termes pairs qui manquent, on a

$$\begin{aligned}\boxed{a_n} &= \frac{\prod_{k=0}^{n-1}(2k+1)}{n\,2^{n+1}\,n!}\,\frac{\prod_{k=1}^{n}(2k)}{\prod_{k=1}^{n}(2k)} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^{n}((2k-1)\,(2k))}{n\,2^{n+1}\,n!\,2^n\,\prod_{k=1}^{n} k} \\ &\boxed{= \frac{(2n)!}{n\,2^{2n+1}\,(n!)^2}.}\end{aligned}$$

I.4.b. La formule de Stirling affirme que

$$\boxed{n! \sim_{n\to+\infty} \sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}.}$$

I.4.c. En l'utilisant, on a, quand n tend vers $+\infty$,

$$a_n \sim \frac{\sqrt{2\pi\, 2n}\,(2n)^{2n}\, e^{-2n}}{n\, 2^{2n+1}\left(\sqrt{2\pi n}\, n^n\, e^{-n}\right)^2} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}\, n^{3/2}}.$$

Or $\sum 1/n^{3/2}$ converge comme série de Riemann où $3/2 > 1$. Donc par comparaison, $\boxed{\sum_{n\geqslant 1} a_n \text{ converge.}}$

II.1.a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, comme somme d'une série géométrique,

$$\boxed{U_n = \frac{1}{2^{n+1}}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^n}.}$$

En outre, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{\frac{1}{2^k} = U_{k-1} - U_k.}$$

II.1.b. Alors,

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k}\,(U_{k-1} - U_k) \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_{k-1}}{k} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k} \\ &= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{U_k}{k+1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k} \\ &= \frac{U_n}{n+1} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} U_k \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}\right) \\ &= \frac{U_n}{n+1} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k\,(k+1)}. \end{aligned}$$

Là encore, les calculs réalisés sont permis, car toutes les séries manipulées convergent, vu que $U_k = 1/2^k$.

II.1.c. On a, sachant que $k+1 \geqslant n$ et que $U_k = 1/2^k$,

$$\begin{aligned} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k\,(k+1)} &\leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k\,n} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\,2^k} = \frac{R_n}{n} = \mathrm{o}(R_n). \end{aligned}$$

II.1.d. Ainsi, $\dfrac{U_n}{n+1} = R_n + \mathrm{o}(R_n) \sim R_n$.

Or $\dfrac{U_n}{n+1} \sim \dfrac{U_n}{n} = \dfrac{1}{n\,2^n}$, donc $\boxed{R_n \sim \dfrac{1}{n\,2^n}.}$

II.2.a. Il s'agit de la somme des termes d'une suite géométrique. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [0,1]$, $-t \neq 1$, donc

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k\, t^k &= \sum_{k=0}^{n-1} (-t)^k = \frac{1-(-t)^n}{1-(-t)} \\ &= \frac{1}{1+t} - (-1)^n\,\frac{t^n}{1+t}. \end{aligned}$$

II.2.b. Alors,

$$(-1)^n\,\frac{t^n}{1+t} = \frac{1}{1+t} - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k\, t^k.$$

En intégrant sur $[0,1]$, et par linéarité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t} - \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k\, t^k\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[\ln(1+t)\Big]_0^1 - \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \int_0^1 t^k\,\mathrm{d}t \\ &= \ln(2) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln(2) - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}. \end{aligned}$$

Alors, d'après I.3.b, et par définition de S_n,

$$\begin{aligned} (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = S_n. \end{aligned}$$

II.2.c. Faisons une intégration par parties, licite car toutes les fonctions maniées sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$:

$$\begin{aligned} S_n &= (-1)^n \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\,\frac{1}{1+t}\right]_0^1 \\ &\quad + (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{n+1}\,\frac{1}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{(-1)^n}{2\,(n+1)} + \frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

II.2.d. Comme $\dfrac{(-1)^n}{2\,(n+1)} \sim \dfrac{(-1)^n}{2n}$, ce que demande l'énoncé signifie que dans l'expression ci-dessus, le second terme est négligeable devant le premier. Pour le prouver, il suffit de montrer que l'intégrale tend vers 0 avec n. Or

$$\begin{aligned} \left|\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t\right| &= \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \\ &\leqslant \int_0^1 t^{n+1}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0. \end{aligned}$$

Ainsi, quand n tend vers $+\infty$,

$$\frac{(-1)^n}{n+1} \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t \ll \frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n},$$

$$\boxed{\text{donc } S_n \sim \frac{(-1)^n}{2n}.}$$

II.3.a. D'après I.4.c, $a_n \sim \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}\,n^{3/2}}$, ce qui signifie que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n\, 2\sqrt{\pi}\,n^{3/2} = 1$. En traduisant cette limite avec les epsilon, étant donné $\varepsilon > 0$, il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geqslant N$,

$$\left|a_k\, 2\sqrt{\pi}\, k^{3/2} - 1\right| \leqslant \varepsilon,$$

ou encore $\quad -\varepsilon \leqslant a_k\, 2\sqrt{\pi}\, k^{3/2} - 1 \leqslant \varepsilon,$

ou aussi $\quad 1-\varepsilon \leqslant a_k\, 2\sqrt{\pi}\, k^{3/2} \leqslant 1+\varepsilon,$

c'est-à-dire finalement,

$$\boxed{\frac{1-\varepsilon}{2\sqrt{\pi}\,k^{3/2}} \leqslant a_k \leqslant \frac{1+\varepsilon}{2\sqrt{\pi}\,k^{3/2}}.}$$

II.3.b. La fonction $t \mapsto 1/t^{3/2}$ décroit sur $[1, +\infty[$ donc pour tout entier $k \geqslant 2$,

$$\forall t \in [k-1, k]\,, \ \frac{1}{t^{3/2}} \geqslant \frac{1}{k^{3/2}}, \qquad \forall t \in [k, k+1]\,, \ \frac{1}{t^{3/2}} \leqslant \frac{1}{k^{3/2}},$$

et en intégrant sur les segment respectifs,

$$\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}} \geqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{k^{3/2}} = \frac{1}{k^{3/2}}, \qquad \int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}} \leqslant \int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{k^{3/2}} = \frac{1}{k^{3/2}},$$

ce qui donne, en regroupant,

$$\boxed{\int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}} \leqslant \frac{1}{k^{3/2}} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}}.}$$

II.3.c.* La fonction $t \mapsto 1/t^{3/2}$ est continue et intégrable sur $[1, +\infty[$ car $3/2 > 1$. Donc les intégrales de l'énoncé convergent. De plus, pour tout $n \geqslant N$,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}} = \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}}, \qquad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}} = \int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}}.$$

Alors, en sommant l'encadrement précédent,

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \leqslant \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}}.$$

Et avec la question II.4.a, d'une part

$$T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \leqslant \frac{1+\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \leqslant \frac{1+\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}},$$

et d'autre part,

$$T_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k \geqslant \frac{1-\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{3/2}} \geqslant \frac{1-\varepsilon}{2\sqrt{\pi}} \int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}},$$

ce qui donne l'encadrement voulu.

II.3.d.* On a

$$\int_{n}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}} = \left[-\frac{2}{\sqrt{t}}\right]_{n}^{+\infty} = \frac{2}{\sqrt{n}}, \qquad \int_{n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^{3/2}} = \frac{2}{\sqrt{n+1}}.$$

Donc d'une part, $T_n \sqrt{\pi\, n} \leqslant 1 + \varepsilon$ et d'autre part,

$$T_n \sqrt{\pi\, n} \geqslant (1-\varepsilon) \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}.$$

Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1$, il existe un rang N_1 tel que pour tout $n \geqslant N_1$,

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} \geqslant 1 - \varepsilon.$$

Alors, pour $n \geqslant \max\{N, N_1\}$,

$$T_n \sqrt{\pi\, n} \geqslant (1-\varepsilon)^2 = 1 - 2\varepsilon + \varepsilon^2 \geqslant 1 - 2\varepsilon,$$

donc $\quad 1 - 2\varepsilon \leqslant T_n \sqrt{\pi\, n} \leqslant 1 + \varepsilon \leqslant 1 + 2\varepsilon$

et $\quad \left|T_n \sqrt{\pi\, n} - 1\right| \leqslant 2\varepsilon.$

Comme ε est arbitraire, 2ε l'est aussi, donc

$$\lim_{n\to+\infty} T_n \sqrt{\pi\, n} = 1$$

ce qui signifie que $\boxed{T_n \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi\, n}}.}$

II.4. Utilisons la technique et les notations de la question 1. Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
V_n &= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_{k-1} - U_k}{k\,(k+1)} \\
&= \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_{k-1}}{k\,(k+1)} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k\,(k+1)} \\
&= \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{U_k}{(k+1)\,(k+2)} - \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k\,(k+1)} \\
&= \frac{U_n}{(n+1)\,(n+2)} + \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k+1} \left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k}\right) \\
&= \frac{U_n}{(n+1)\,(n+2)} - 2 \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k\,(k+1)\,(k+2)}.
\end{aligned}$$

Or, quand n tend vers $+\infty$,

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k\,(k+1)\,(k+2)} \leqslant \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{U_k}{k\,(k+1)\,n} = \frac{V_n}{n} \ll V_n.$$

En outre $\displaystyle\frac{U_n}{(n+1)\,(n+2)} \sim \frac{U_n}{n^2} = \frac{1}{n^2\,2^n}$. Donc

$$\boxed{V_n \sim \frac{1}{n^2\,2^n}.}$$

II.5. Au voisinage de $+\infty$, on a donc

$$V_n \ll R_n \ll |S_n| \ll T_n.$$

Donc la série de I.2 converge le plus rapidement, et la série de I.4 converge le moins rapidement. À titre d'illustration, si l'on désire une valeur approchée à 10^{-3} près de la somme de chacune des séries, il faudra choisir n de sorte que $T_n \approx 10^{-3}$, c'est-à-dire que $\sqrt{\pi\, n} \approx 10^3$, ou encore $n \approx \frac{1}{\pi}\,10^6 \approx 300\,000$. Et pour l'autre série, on choisira n tel que $V_n \approx 10^{-3}$ c'est-à-dire $n^2\,2^n \approx 10^3$, soit $n = 6$, puisque $6^2 \cdot 2^6 = 9 \cdot 4 \cdot 64 = 9 \cdot 256 \geqslant 1\,000$ mais $5^2 \cdot 2^5 = 25 \cdot 32 = 800$. Où l'on comprend bien ce que signifie la vitesse de convergence.