

Onzième devoir surveillé

[extrait de CCINP22]

3 heures

Les calculatrices sont interdites.

PROBLÈME 1
Intégrales de Gauss**Présentation**

La partie I permet d'obtenir un résultat de convergence. La partie II aboutit à un calcul exact de fonction gaussienne dite « intégrale de Gauss ». La partie III permet d'établir une majoration.

Partie I - Convergence d'une suite

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$, on pose :

$$a_{k,n} = \frac{\sqrt{2n}}{2^{2n+1}} \binom{2n}{k}.$$

Pour tout $m \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_m = \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{m}{2}} dt.$$

Q1. Montrer que la suite $(I_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

Q2. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$I_{m+2} = \frac{m+2}{m+3} I_m.$$

Q3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I_{2n} = \frac{\sqrt{2n}}{2(2n+1)a_{n,n}} \text{ et } I_{2n-1} = \frac{\pi}{\sqrt{2n}} a_{n,n}.$$

Q4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1 \leq \frac{I_{2n-1}}{I_{2n}} \leq \frac{I_{2n-2}}{I_{2n}}.$$

En déduire que :

$$\frac{1}{1 + \frac{1}{2n}} \leq 2\pi(a_{n,n})^2 \leq 1.$$

Q5. En déduire la convergence de la suite $(a_{n,n})_{n \geq 1}$ lorsque n tend l'infini, puis que :

$$I_{2n} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Partie II - Calcul d'une intégrale de Gauss

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n dt.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose :

$$u_n(t) = \begin{cases} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n & \text{si } 0 \leq t \leq \sqrt{n}, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin, on considère l'intégrale de Gauss :

$$K = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt.$$

Q6. À l'aide d'un changement de variable simple, déduire de la question Q5 que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et donner sa limite.

Q7. Montrer que la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ et donner sa limite.

Q8. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $1+x \leq e^x$, et en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, 0 \leq u_n(t) \leq e^{-t^2}.$$

Q9. Montrer que l'intégrale K est convergente, puis déduire des questions précédentes une valeur exacte de K .

Partie III - Calcul d'une majoration

Q10. Montrer qu'il existe une fonction $g : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ et un réel $M \geq 0$, tels que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right], \frac{1-x}{1+x} = e^{-2x+g(x)}, \text{ et } |g(x)| \leq Mx^3.$$

Q11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $k \in \llbracket n+1, 2n \rrbracket$:

$$\frac{a_{k,n}}{a_{n,n}} = \frac{\prod_{i=1}^{k-n-1} (1 - \frac{i}{n})}{\prod_{i=1}^{k-n-1} (1 + \frac{i}{n})} \times \frac{n}{k}.$$

Q12. En déduire que pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$n+1 \leq k \leq \frac{3n}{2} + 1,$$

il existe $b_{k,n} \in \mathbb{R}$ tel que :

$$|b_{k,n}| \leq \frac{M}{n^3} (k-n-1)^4, \\ \text{et } \frac{a_{k,n}}{a_{n,n}} = \frac{n}{k} \times e^{b_{k,n}} \times e^{-\frac{1}{n}(k-n-1)(k-n)}.$$

PROBLÈME 2

Factorisation QR

Présentation

Ce problème s'intéresse dans la partie I à des propriétés des matrices de rang 1. Certaines de ces matrices sont ensuite utilisées dans la partie II pour construire des matrices orthogonales permettant dans la partie III de prouver l'existence d'une factorisation QR pour une matrice carrée quelconque.

Notations

Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, on note $M_{n,p}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{R}$. L'ensemble des matrices réelles carrées de taille n est noté $M_n(\mathbb{R})$.

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$: on note également A l'endomorphisme de $M_{n,1}(\mathbb{R})$ qui à X associe AX .

Pour tout $A \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, A^T désigne la matrice transposée de A .

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite nilpotente s'il existe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ tel que : $A^k = 0$.

L'ensemble $M_{n,1}(\mathbb{R})$ est muni de son produit scalaire canonique $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme associée $\|\cdot\|$. En identifiant $M_1(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$, on a pour tous $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\langle X, Y \rangle = X^T Y, \text{ et } \|X\|^2 = \langle X, X \rangle.$$

On suppose dans tout ce problème que $n \in \mathbb{N}$ est un entier naturel vérifiant $n \geq 2$.

Partie I - Matrices de rang 1

I.1 - Une expression des matrices de rang 1

Q13. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1. Montrer qu'il existe $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$ tels que : $A = XY^T$.

Q14. Réciproquement, soient $X, Y \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. Montrer que la matrice XY^T est de rang 1.

I.2 - Quelques propriétés

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

Q15. Montrer que $A^2 = \text{tr}(A) A$.

Q16. En déduire, par récurrence sur k , une expression de A^k en fonction de A pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Q17. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la trace de A pour que A soit nilpotente.

Q18. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la trace de A pour que A soit diagonalisable.

Partie II - Matrices de Householder

II.1 - Un exemple

On définit :

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Q19. Calculer A^2 . En déduire un polynôme annulateur de A .

Q20. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A .

Q21. Montrer que les sous-espaces propres de A sont orthogonaux.

Q22. Déterminer une matrice $P \in O_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $D \in M_3(\mathbb{R})$, telles que : $P^T A P = D$.

Q23. Interpréter géométriquement l'endomorphisme A de $M_{3,1}(\mathbb{R})$.

II.2 - Matrices de Householder

Soit $V \in M_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$. On définit $P_V, Q_V \in M_n(\mathbb{R})$ par :

$$(1) \quad P_V = \frac{1}{\|V\|^2} V V^T \text{ et } Q_V = I_n - 2 \frac{1}{\|V\|^2} V V^T.$$

Q24. Montrer que $\text{Im}(P_V) = \text{Vect}(V)$ et que $\text{Ker}(P_V) = \text{Vect}(V)^\perp$.

Q25. Montrer que P_V est la projection orthogonale sur la droite $\text{Vect}(V)$.

Préciser le rang et la trace de la matrice P_V .

Q26. Montrer que Q_V est symétrique et orthogonale.

Q27. Montrer que Q_V est la symétrie orthogonale par rapport à $\text{Vect}(V)^\perp$.

Partie III - Factorisation QR

III.1 - Un résultat préliminaire

Soient $U, V \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que : $\|U\| = \|V\|$. On note : $D = \text{Vect}(U - V)$.

Q28. Montrer que $D^\perp$ est l'ensemble des $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, tels que : $\|X - U\| = \|X - V\|$.

Q29. Donner la décomposition de U sur la somme directe $M_{n,1}(\mathbb{R}) = D \oplus D^\perp$.

Q30. On suppose U et V non colinéaires. Calculer $Q_{U-V} U$ où Q_{U-V} est définie en (1).

Q31. En déduire que pour tous $\tilde{U}, \tilde{V} \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, il existe une matrice orthogonale Q , telle que $Q \tilde{U}$ soit colinéaire à $\tilde{V}$.

III.2 - Factorisation QR

Q32. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une matrice orthogonale Q_1 , telle que $Q_1 A$ soit de la forme :

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} \alpha & * & \cdots & * \\ 0 & & & \\ \vdots & & C_1 & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

où $\alpha \in \mathbb{R}$ et $C_1 \in M_{n-1}(\mathbb{R})$.

Q33. En raisonnant par récurrence sur n , montrer que pour tout $A \in M_n(\mathbb{R})$, il existe une matrice Q orthogonale, telle que $Q A$ soit triangulaire supérieure.

FIN