Corrigé du onzième devoir surveillé

PROBLÈME 2

Q13. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{rg}(A) = 1$.

Le rang de la matrice nulle est 0, donc A n'est pas nulle. Alors elle admet une colonne non nulle : il existe $j_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que la colonne $C_{j_0}(A)$ n'est pas nulle. Pour alléger les écritures, posons $X = C_{j_0}(A)$.

Comme $\mathrm{rg}(A) = 1$, toutes les colonnes $C_j(A)$, pour $j \in [\![1, n]\!]$, sont liées entre elles, donc sont liées à la colonne X. Ainsi, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$, il existe $y_j \in \mathbb{R}$ tel que $C_j(A) = y_j X$. Nommons Y la colonne contenant les y_j. Constatons que $y_{j_0} = 1$, donc Y n'est pas la colonne nulle.

Alors, la matrice A s'écrit, en colonnes,

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} y_1 X & \cdots & y_n X \end{pmatrix} \\ &= X \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix} = X Y^\top. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe des colonnes X et Y non nulles dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$ telles que $A = XY^\top$.

Q14. Réciproquement, soient X et Y des colonnes non nulles. Avec des notations évidentes,

$$\begin{aligned} XY^\top &= X \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} y_1 X & \cdots & y_n X \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Où l'on voit que les colonnes de cette matrice A sont toutes liées à X, donc $\mathrm{rg}(A) \leqslant 1$. Comme Y n'est pas nulle, l'un des y_j n'est pas nul. Et comme X n'est pas nulle, la colonne $y_j X$ n'est pas nulle, donc $\mathrm{rg}(A) \geqslant 1$. Alors, $\mathrm{rg}(A) = 1$.

Pour toutes colonnes X et Y non nulles dans $M_{n,1}(\mathbb{R})$, la matrice carrée $XY^\top$ est de rang 1.

Q15. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$, avec $\mathrm{rg}(A) = 1$. D'après la question Q13, elle s'écrit $A = XY^\top$, où X et Y sont des colonnes non nulles. Alors

$$A^2 = (XY^\top)(XY^\top) = X(Y^\top X)Y^\top.$$

En notant

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

on voit que

$$Y^\top X = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

En outre,

$$A = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix} = (x_i y_j)_{1 \leqslant i,j \leqslant n},$$

donc

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Ainsi,

$$A^2 = X(\mathrm{tr}(A))Y^\top = \mathrm{tr}(A)XY^\top = \mathrm{tr}(A)A.$$

Q16. Alors, $A^3 = \mathrm{tr}(A)A^2 = \mathrm{tr}(A)^2 A$, et par récurrence,

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ A^k = \mathrm{tr}(A)^{k-1}A.$$

En effet, c'est clairement vrai pour $k = 1$. En supposant que ça le soit pour un certain $k \geqslant 1$,

$$A^{k+1} = A^k A = \mathrm{tr}(A)^{k-1}A^2 = \mathrm{tr}(A)^k A,$$

et c'est vrai au rang $k + 1$.

Q17. Comme $\mathrm{rg}(A) = 1$, $A^1 \neq 0$. Soit un entier $k \geqslant 2$. Comme $A \neq 0$ et $k - 1 \geqslant 1$, on a

$$A^k = 0 \iff \mathrm{tr}(A)^{k-1}A = 0 \iff \mathrm{tr}(A) = 0.$$

Ainsi, A est nilpotente si et seulement si $\mathrm{tr}(A) = 0$.

Q18. D'après la question Q15, le polynôme $X^2 - \mathrm{tr}(A)X$ est annulateur de A.

Si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, ce polynôme est scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples, donc A est diagonalisable.

Si $\mathrm{tr}(A) = 0$, le polynôme annulateur se réduit à X^2. Sa seule racine est 0, qui est donc aussi la seule valeur propre possible de A. Comme $\mathrm{rg}(A) = 1 < n$, 0 est bien valeur propre de A. Si A était diagonalisable, elle serait semblable à la matrice nulle, donc elle serait nulle, ce qui n'est pas. Donc dans ce cas, A n'est pas diagonalisable.

Ainsi, A est diagonalisable si et seulement si $\mathrm{tr}(A) \neq 0$.

Q19. Sans difficulté,

$A^2 = I_3$, et $X^2 - 1$ est annulateur de A.

Q20. Les seules valeurs propres possibles de A sont -1 et 1, les racines de $X^2 - 1$. Mais A est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable. Alors

$$\mathrm{tr}(A) = m(1) \cdot 1 + m(-1) \cdot (-1),$$

où $m(1)$ et $m(-1)$ sont les multiplicités de 1 et -1 comme valeurs propres de A, éventuellement nulles si l'une ou l'autre n'est pas valeur propre. Ainsi,

$$m(1) - m(-1) = 1.$$

Or $m(1) + m(-1) = 3$, car A est diagonalisable, donc $m(1) = 2$ et $m(-1) = 1$.

Commentaire. Bien-sûr, il est permis de calculer χ_A. Mais le calcul est traitre et cette approche est plus amusante.

Soit $X \in E_1(A)$.

$$AX = X \iff \begin{cases} x - 2y + 2z = 3x \\ -2x + y + 2z = 3y \\ 2x + 2y + z = 3z \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -2x - 2y + 2z = 0 \\ -2x - 2y + 2z = 0 \\ 2x + 2y - 2z = 0 \end{cases}$$
$$\iff x + y - z = 0.$$

Ainsi, $\boxed{E_1(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \oplus \mathbb{R}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}}$.

Soit $X \in E_{-1}(A)$.

$$AX = -X \iff \begin{cases} x - 2y + 2z = -3x \\ -2x + y + 2z = -3y \\ 2x + 2y + z = -3z \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 4x - 2y + 2z = 0 \\ -2x + 4y + 2z = 0 \\ 2x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$
$$\iff x = y = -z.$$

Ainsi, $\boxed{E_{-1}(A) = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}}$.

Q21. On a vu que $E_1(A)$ est le plan d'équation $x + y - z = 0$. Un vecteur normal à ce plan est

$$\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Et ce vecteur engendre la droite $E_{-1}(A)$.

$\boxed{\text{Les sous-espaces propres de } A \text{ sont orthogonaux.}}$

Commentaire. Mais on pouvait le dire sans calcul : A est symétrique réelle, donc ses sous-espaces propres sont orthogonaux, d'après le théorème spectral.

Q22. Avec les questions précédentes, $A = PDP^{-1}$, où $D = \operatorname{diag}(1, 1, -1)$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Malheureusement, cette matrice P n'est pas orthogonale, ses colonnes ne sont pas normées. Commençons par les normer : posons

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, C_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},$$
$$\text{et } C_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}.$$

Par construction, $C_1 \in E_1(A)$ et $C_3 \in E_{-1}(A)$ donc $C_1 \perp C_3$. De même, $C_2 \perp C_3$. Mais $C_1 \not\perp C_2$. Gardons arbitrairement C_1 et C_3, et posons

$$C_2' = C_3 \wedge C_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}.$$

Alors, (C_1, C_2', C_3) est une base orthonormée (directe) de $M_{3,1}(\mathbb{R})$. De plus, comme $C_2' \perp C_3$ et que $E_1(A) = E_{-1}(A)^\perp = C_3^\perp$, $C_2' \in E_1(A)$. On peut le vérifier à la main si l'on préfère.

Alors, on a bien $\boxed{A = PDP^\top}$ en choisissant

$$\boxed{P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \text{ et } D = \operatorname{diag}(1, 1, -1).}$$

Q23. Comme $A^2 = I_3$, A est une symétrie, par rapport à $E_1(A)$ et parallèlement à $E_{-1}(A)$. Et comme $E_1(A) \perp E_{-1}(A)$,

$\boxed{A \text{ est la symétrie orthogonale par rapport au plan } E_1(A) \text{ d'équation } x + y - z = 0.}$

Q24. D'après la question Q13, $\operatorname{rg}(P_V) = 1$.

Soit $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$. On a

$$P_V X = \frac{1}{\|V\|^2} V V^\top X = \frac{1}{\|V\|^2} V \langle V, X\rangle = \frac{\langle V, X\rangle}{\langle V, V\rangle} V,$$

où l'on reconnait le projeté orthogonal de X sur la droite $\mathbb{R}V$. Donc P_V est la projection orthogonale sur $\mathbb{R}V$, d'où $\boxed{\operatorname{Im}(P_V) = \mathbb{R}V \text{ et } \operatorname{Ker}(P_V) = V^\perp.}$

Q25. On vient de voir que P_V est la projection orthogonale sur $\mathbb{R}V$. De plus,

$$\boxed{\operatorname{rg}(P_V)} = \dim(\operatorname{Im}(P_V)) \boxed{= 1.}$$

En outre, P_V est diagonalisable car c'est un projecteur. Et puisque $\operatorname{Im}(P_V) = E_1(P_V)$ et $\operatorname{Ker}(P_V) = E_0(P_V)$,

$$\boxed{\operatorname{tr}(P_V)} = m(1) \cdot 1 + m(0) \cdot 0 = \dim(E_1(P_V)) \boxed{= 1.}$$

Q26. On voit que $Q_V = I_n - 2P_V$. De plus,

$$P_V^\top = \frac{1}{\|V\|^2} (V V^\top)^\top = \frac{1}{\|V\|^2} V V^\top = P_V.$$

Donc

$$Q_V^\top = (I_n - 2P_V)^\top = I_n - 2P_V^\top = I_n - 2P_V = Q_V,$$

et $\boxed{Q_V \text{ est symétrique.}}$

En outre,

$$\begin{aligned} Q_V^\top Q_V = Q_V^2 &= (I_n - 2P_V)^2 \\ &= I_n - 4P_V + 4P_V^2 = I_n - 4P_V + 4P_V = I_n, \end{aligned}$$

et $\boxed{Q_V \text{ est orthogonale.}}$

Q27. On a vu que $Q_V^2 = I_n$ donc Q_V est une symétrie : c'est la symétrie par rapport à $E_1(Q_V)$ parallèlement à $E_{-1}(Q_V)$.

Soit $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$. On a

$$Q_V X = X \iff X - 2P_V X = X \iff P_V X = 0,$$

donc $E_1(Q_V) = \mathrm{Ker}(P_V) = V^\perp$. De même,

$$Q_V X = -X \iff X - 2P_V X = -X \iff P_V X = X,$$

donc $E_{-1}(Q_V) = \mathrm{Im}(P_V) = \mathbb{R}V$.

Comme $E_1(Q_V) \perp E_{-1}(Q_V)$,

$\boxed{Q_V \text{ est la symétrie orthogonale par rapport à } V^\perp.}$

Q28. Soit $X \in M_{3,1}(\mathbb{R})$. Sachant que $\|U\| = \|V\|$,

$$\begin{aligned}
&\|X-U\| = \|X-V\| \\
&\iff \|X-U\|^2 = \|X-V\|^2 \\
&\iff \|X\|^2 - 2\langle X,U\rangle + \|U\|^2 \\
&\qquad = \|X\|^2 - 2\langle X,V\rangle + \|V\|^2 \\
&\iff \langle X,U\rangle = \langle X,V\rangle \\
&\iff \langle X,U-V\rangle = 0 \\
&\iff X \in D^\perp.
\end{aligned}$$

Q29. Avec la question Q25, le projeté orthogonal de U sur D est

$$P_{U-V}U = \frac{\langle U-V,U\rangle}{\|U-V\|^2}(U-V).$$

Bien-sûr, cette expression n'est valable que si $U \neq V$. Supposons-le momentanément.

Par ailleurs, toujours avec $\|U\| = \|V\|$,

$$\begin{aligned}
\|U-V\|^2 &= \|U\|^2 - 2\langle U,V\rangle + \|V\|^2 \\
&= 2\|U\|^2 - 2\langle U,V\rangle \\
&= 2\langle U,U-V\rangle,
\end{aligned}$$

donc

$$P_{U-V}U = \tfrac{1}{2}(U-V).$$

L'intérêt de cette expression est qu'elle est encore valable si $U = V$.

Ainsi, la décomposition de U dans la somme directe $M_{3,1}(\mathbb{R}) = D \oplus D^\perp$ est

$$\begin{aligned}
U &= \tfrac{1}{2}(U-V) + U - \tfrac{1}{2}(U-V) \\
&= \underbrace{\tfrac{1}{2}(U-V)}_{\in D} + \underbrace{\tfrac{1}{2}(U+V)}_{\in D^\perp}.
\end{aligned}$$

Q30. Si U et V ne sont pas liés, $U - V \neq 0$ et

$$Q_{U-V}U = U - 2P_{U-V}U = U - 2\tfrac{1}{2}(U-V) = V.$$

Q31. Soient $\widetilde{U}$ et $\widetilde{V}$ dans $M_{3,1}(\mathbb{R})$.

Si la famille $(\widetilde{U}, \widetilde{V})$ est liée, en prenant $Q = I_n$, on voit que $Q\widetilde{U}$ et $\widetilde{V}$ sont colinéaires. Bien-sûr, I_n est orthogonale.

Supposons que la famille $(\widetilde{U}, \widetilde{V})$ est libre. Alors, $\widetilde{U}$ et $\widetilde{V}$ sont non nuls et l'on peut poser

$$U = \frac{1}{\|\widetilde{U}\|}\widetilde{U} \text{ et } V = \frac{1}{\|\widetilde{V}\|}\widetilde{V}.$$

Alors, U et V sont non liés et $\|U\| = \|V\| = 1$. D'après la question Q30, $Q_{U-V}U = V$, donc

$$Q_{U-V}\widetilde{U} = \|\widetilde{U}\|Q_{U-V}U = \|\widetilde{U}\|V = \frac{\|\widetilde{U}\|}{\|\widetilde{V}\|}\widetilde{V},$$

et l'on voit que $Q_{U-V}\widetilde{U}$ est colinéaire à $\widetilde{V}$, où Q_{U-V} est orthogonale.

$\boxed{\text{L'affirmation de l'énoncé est démontrée.}}$

Q32. Nommons $C_j(A)$ les colonnes de A. D'après la question Q31, il existe une matrice orthogonale Q_1 telle que

$$Q_1 C_1(A) \text{ et } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

soient colinéaires, c'est-à-dire qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que

$$Q_1 C_1(A) = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Alors, en écrivant en colonnes, puis par blocs,

$$\begin{aligned}
Q_1 A &= \begin{pmatrix} Q_1 C_1(A) & \cdots & Q_1 C_n(A) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha & L_1 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

où 0 représente une colonne de $n-1$ zéros, L_1 est une ligne de taille $n-1$ et C_1 est une matrice carrée de taille $n-1$.

Q33. Démontrons l'annonce de l'énoncé par une récurrence sur la taille n de la matrice A.

Clairement, si $n = 1$, c'est vrai, car les matrices ne sont alors que des scalaires.

Supposons que la propriété soit vraie pour un certain $n-1$. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Avec la question Q32, il existe $Q_1 \in O_n(\mathbb{R})$ telle que

$$Q_1 A = \begin{pmatrix} \alpha & L_1 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix},$$

en reprenant les notations précédentes. D'après l'hypothèse de récurrence, il existe $Q_2 \in O_{n-1}(\mathbb{R})$ et T_1 triangulaire supérieure de taille $n-1$ telles que $Q_2 C_1 = T_1$. Alors, toujours par blocs,

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} Q_1 A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & L_1 \\ 0 & C_1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha & L_1 \\ 0 & Q_2 C_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & L_1 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

On voit que cette matrice est triangulaire supérieure. De plus, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} \in O_n(\mathbb{R})$, ce qu'un rapide calcul permet de vérifier, donc

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} Q_1 \in O_n(\mathbb{R}),$$

car $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe pour la multiplication. Alors, la propriété est valide au rang n.

$\boxed{\text{Par le principe de récurrence, l'affirmation de l'énoncé est démontrée.}}$