

Douzième devoir surveillé

Fonctions d'endomorphismes

[MP12]

Durée : trois heures

L'usage d'ordinateur ou de calculatrice est interdit.

Dans ce texte, on note $\mathbf{R}$ l'ensemble des nombres réels, $\mathbf{R}^+$ l'ensemble des réels positifs ou nuls et $\mathbf{R}^{+*}$ l'ensemble des réels strictement positifs.

Pour tout entier n strictement positif on note $\mathfrak{L}_n$ l'ensemble des endomorphismes de $\mathbf{R}^n$; l'identité de $\mathfrak{L}_n$ est notée I . Le produit scalaire euclidien de $\mathbf{R}^n$ est noté (x, y) et la norme associée $\|x\| = (x, x)^{1/2}$. Si $s \in \mathfrak{L}_n$, l'ensemble des valeurs propres de s est noté $\sigma(s)$. On définit la fonction $\mathcal{Q}_s$ sur $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$ de la façon suivante :

$$(1) \quad \mathcal{Q}_s(x) = \frac{(s(x), x)}{\|x\|^2};$$

c'est le quotient de Rayleigh de s .

On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des endomorphismes symétriques de $\mathbf{R}^n$. Si $T \in \mathcal{S}_n$, on note respectivement $m(T)$ et $M(T)$ le minimum et le maximum de $\sigma(T)$. On dit que $T \in \mathcal{S}_n$ est un endomorphisme positif (resp. strictement positif) si $\forall x \neq 0, x \in \mathbf{R}^n$, on a $(T(x), x) \geq 0$ (resp. $(T(x), x) > 0$). L'ensemble des endomorphismes positifs (resp. strictement positifs) est noté $\mathcal{S}_n^+$ (resp. $\mathcal{S}_n^{+*}$).

1 Fonctions d'endomorphismes symétriques

Dans cette partie on considère $T \in \mathcal{S}_n$.

Question 1 Soient T_1 et T_2 appartenant à $\mathcal{S}_n$. Démontrer que $T_1 + T_2 \in \mathcal{S}_n$.

Question 2 Montrer que $\mathcal{Q}_T : \mathbf{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ atteint les valeurs $m(T)$ et $M(T)$.

Question 3 Démontrer que l'on a

$$(2) \quad \begin{cases} m(T) = \min_{x \in \mathbf{R}^n, x \neq 0} \mathcal{Q}_T(x), \\ M(T) = \max_{x \in \mathbf{R}^n, x \neq 0} \mathcal{Q}_T(x). \end{cases}$$

On pourra faire appel à une base de vecteurs propres de T .

Question 4 Montrer que $T \in \mathcal{S}_n^+$ (resp. $T \in \mathcal{S}_n^{+*}$) si et seulement si $\sigma(T) \subset \mathbf{R}^+$ (resp. $\sigma(T) \subset \mathbf{R}^{+*}$).

Soit J un intervalle contenant $\sigma(T)$ et f une fonction définie sur J , à valeurs dans $\mathbf{R}$.

Question 5 Montrer qu'il existe une et une seule application linéaire U telle que

$$(3) \quad U(y) = f(\lambda)y, \quad \forall \lambda \in \sigma(T), \forall y \in \ker(T - \lambda I),$$

et que $U \in \mathcal{S}_n$.

On notera $U = f(T)$ l'endomorphisme symétrique ainsi défini, ce qui conduit à considérer f comme une application de $\mathcal{S}_n$ dans lui-même.

Question 6 Soit p la restriction à J d'une fonction polynomiale à coefficients réels; on note $p(t) = \sum_{j=0}^k \alpha_j t^j$, avec $\alpha_j \in \mathbf{R}$ pour tout j vérifiant $0 \leq j \leq k$. Démontrer que l'endomorphisme symétrique $p(T)$ est égal à $\alpha_0 I + \sum_{j=1}^k \alpha_j T^j$ où

$$T^j = \underbrace{T \circ T \circ \dots \circ T}_{j \text{ fois}}.$$

Question 7 Y-a-t-il des fonctions $g : J \rightarrow \mathbf{R}$ telles que $g(T)$ ne soit pas égal à un polynôme en T ?

Question 8 Déterminer les valeurs et les vecteurs propres de $f(T)$ en fonction de ceux de T .

Question 9 Pour des fonctions f et g définies sur l'intervalle J , démontrer que $(fg)(T) = f(T) \circ g(T)$.

Question 10 On considère $s \in \mathcal{S}_n^{+*}$ et la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{t}$. Montrer que $f(s) = s^{-1}$ (inverse de l'endomorphisme s).

Question 11 On considère $s \in \mathcal{S}_n^+$. Lorsque $f(t) = \sqrt{t}$, on note $\sqrt{s}$ l'endomorphisme $f(s)$. Montrer que $\sqrt{s}$ est bien défini et que $(\sqrt{s})^2 = s$. En admettant que toutes les valeurs propres de s sont simples, combien y-a-t-il de solutions C dans $\mathcal{S}_n^+$, puis dans $\mathcal{S}_n$, à l'équation $C^2 = s$?

2 Relation d'ordre sur $\mathcal{S}_n$

Soient T_1 et T_2 deux éléments de $\mathcal{S}_n$. On note $T_2 \geq T_1$ si et seulement si $T_2 - T_1 \in \mathcal{S}_n^+$.

Question 12 Démontrer que la relation $\geq$ définit une relation d'ordre dans $\mathcal{S}_n$. Est-elle totale?

Question 13 Soit $U \in \mathcal{S}_n$. Démontrer que si $T_2 \geq T_1$ alors $U \circ T_2 \circ U \geq U \circ T_1 \circ U$.

Soit J un intervalle de $\mathbf{R}$. On dit que la fonction $f : J \rightarrow \mathbf{R}$ définit un opérateur croissant si pour tout T_1 et tout T_2 , endomorphismes symétriques vérifiant $\sigma(T_1) \subset J$ et $\sigma(T_2) \subset J$, alors

$$(4) \quad T_2 \geq T_1 \implies f(T_2) \geq f(T_1).$$

Question 14 Démontrer que l'application $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ donnée par $f(t) = t^2$ ne définit pas un opérateur croissant.

On pourra, à cet effet, considérer les endomorphismes T_1 et T_2 de matrices respectives

$$(5) \quad M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } M_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base canonique.

Question 15 Soient T_1 et $T_2 \in \mathcal{S}_n^{+*}$ tels que $T_2 \geq T_1$. En s'aidant de la question 13 avec $U = T_2^{-1/2}$, montrer que les valeurs propres de $U \circ T_1 \circ U$ sont inférieures ou égales à 1. En déduire que $U^{-1} \circ T_1^{-1} \circ U^{-1} \geq I$, puis que l'application $f : \mathbf{R}^{+*} \rightarrow \mathbf{R}$ donnée par $f(t) = -1/t$ définit un opérateur croissant.

Question 16 Soient T_1 et $T_2 \in \mathcal{S}_n^+$ tels que $T_2 \geq T_1$. Démontrer que les valeurs propres de $T_2^{1/2} - T_1^{1/2}$ sont positives. En déduire que l'application $f : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ donnée par $f(t) = \sqrt{t}$ définit un opérateur croissant.

3 Inégalité de Löwner-Heinz

On va montrer que pour tout $a \in]0, 1[$, la fonction $\varphi_a : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ définie par $\varphi_a(t) = t^a$ définit un opérateur croissant. Pour $u \in \mathbf{R}^+$, on note $f_u : \mathbf{R}^{+*} \rightarrow \mathbf{R}$ la fonction donnée par

$$f_u(t) = \frac{t}{t+u}.$$

Question 17 Démontrer que f_u définit un opérateur croissant. On pourra s'aider de la question 15.

Soient φ une application de $\mathbf{R}^{+*}$ dans $\mathcal{L}_n$ et $\mathcal{B}$ une base de $\mathbf{R}^n$. On note $\Phi(s)$ la matrice de l'endomorphisme $\varphi(s)$ dans la base $\mathcal{B}$ et $(\Phi(s)_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ les applications coordonnées de $\Phi(s)$. On dira que φ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$ si les fonctions coordonnées $s \mapsto \Phi(s)_{i,j}$ le sont. Par définition, on notera $\int_0^{+\infty} \varphi(s) ds$ l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ a pour coefficients les $\int_0^{+\infty} \Phi(s)_{i,j} ds$. Cette matrice sera notée $\int_0^{+\infty} \Phi(s) ds$.

Question 18 Montrer que cette définition est indépendante du choix de la base $\mathcal{B}$.

On considère $s \in \mathcal{S}_n^{+*}$ et $a \in]0, 1[$.

Question 19 Montrer que la fonction φ à valeurs dans $\mathcal{L}_n$ définie par $\varphi(u) = f_u(s) u^{a-1}$ est continue et intégrable sur $]0, +\infty[$. On pourra trouver utile de faire appel à une base orthonormée adaptée à s .

On admet que

$$(6) \quad t^a = \frac{\sin a \pi}{\pi} \int_0^{+\infty} f_u(t) u^{a-1} du.$$

Question 20 Montrer que

$$(7) \quad s^a = \frac{\sin a \pi}{\pi} \int_0^{+\infty} f_u(s) u^{a-1} du.$$

Question 21 En déduire que la fonction φ_a définit un opérateur croissant.

Fin de l'épreuve