**14 03 26**

# Corrigé du douzième devoir surveillé

**1.** Soient $\mathrm{T}_1$ et $\mathrm{T}_2$ dans $\mathcal{S}_n$. Pour tout $(x,y)\in(\mathbb{R}^n)^2$,

$$\begin{aligned}\big((\mathrm{T}_1+\mathrm{T}_2)(x),y\big)&=(\mathrm{T}_1(x),y)+(\mathrm{T}_2(x),y)\\&=(x,\mathrm{T}_1(y))+(x,\mathrm{T}_2(y))\\&=\big(x,(\mathrm{T}_1+\mathrm{T}_2)(y)\big),\end{aligned}$$

donc $\mathrm{T}_1+\mathrm{T}_2\in\mathcal{S}_n$.

**2.** Soit $\lambda\in\sigma(\mathrm{T})$ une valeur propre de $\mathrm{T}$ et $x$ un vecteur propre associé. Comme $x\neq 0$, on a

$$\mathcal{Q}_{\mathrm{T}}(x)=\frac{(\mathrm{T}(x),x)}{\|x\|^2}=\frac{(\lambda x,x)}{\|x\|^2}=\lambda\frac{(x,x)}{\|x\|^2}=\lambda.$$

Ainsi, $\mathcal{Q}_{\mathrm{T}}$ atteint toutes les valeurs propres de $\mathrm{T}$ : en particulier, $\mathcal{Q}_{\mathrm{T}}$ atteint $m(\mathrm{T})$ et $M(\mathrm{T})$.

**3.** Nommons $m(\mathrm{T})=\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n=M(\mathrm{T})$ les valeurs propres de $\mathrm{T}$, non nécessairement distinctes. Et soit $\mathcal{B}=(e_1,\dots,e_n)$ une base orthonormée de vecteurs propres associés : une telle base existe car $\mathrm{T}$ est symétrique. Pour tout $x\in\mathbb{R}^n$ qui s'écrit $x=\sum_{i=1}^n x_i\,e_i$, sachant que $\mathcal{B}$ est une base orthonormée, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}_{\mathrm{T}}(x)=\frac{(\mathrm{T}(x),x)}{\|x\|^2}&=\frac{\big(\sum_{i=1}^n x_i\,\mathrm{T}(e_i),\sum_{i=1}^n x_i\,e_i\big)}{\big\|\sum_{i=1}^n x_i\,e_i\big\|^2}\\&=\frac{\big(\sum_{i=1}^n \lambda_i\,x_i\,e_i,\sum_{i=1}^n x_i\,e_i\big)}{\sum_{i=1}^n x_i^2}=\frac{\sum_{i=1}^n\lambda_i\,x_i^2}{\sum_{i=1}^n x_i^2}\,;\end{aligned}$$

donc on peut encadrer $m(\mathrm{T})\leqslant\mathcal{Q}_{\mathrm{T}}(x)\leqslant M(\mathrm{T})$, puisque pour tout $i\in[\![1,n]\!]$, $m(\mathrm{T})\leqslant\lambda_i\leqslant M(\mathrm{T})$. Et comme $m(\mathrm{T})$ et $M(\mathrm{T})$ sont atteints, on a bien

$m(\mathrm{T})=\min\mathcal{Q}_{\mathrm{T}}$ et $M(\mathrm{T})=\max\mathcal{Q}_{\mathrm{T}}$.

**4.** Si $\mathrm{T}\in\mathcal{S}_n^+$, pour tout $x\in\mathbb{R}^n$, $\big(\mathrm{T}(x),x\big)\geqslant 0$, donc si $x\neq 0$, $\mathcal{Q}_{\mathrm{T}}(x)\geqslant 0$. Or $m(\mathrm{T})=\min_{\mathbb{R}^n\smallsetminus\{0\}}\mathcal{Q}_{\mathrm{T}}$, donc $m(\mathrm{T})\geqslant 0$. Mais $m(\mathrm{T})=\min\sigma(\mathrm{T})$ donc $\sigma(\mathrm{T})\subset\mathbb{R}^+$.

Réciproquement, si $\sigma(\mathrm{T})\subset\mathbb{R}^+$, $m(\mathrm{T})\geqslant 0$ donc pour tout $x\neq 0$, $\mathcal{Q}(x)\geqslant 0$, d'où $\big(\mathrm{T}(x),x\big)\geqslant 0$ et $\mathrm{T}\in\mathcal{S}_n^+$.

Ainsi, $\mathrm{T}\in\mathcal{S}_n^+$ si et seulement si $\sigma(\mathrm{T})\subset\mathbb{R}^+$.

Le même raisonnement permet d'affirmer que $\mathrm{T}\in\mathcal{S}_n^{+*}$ si et seulement si $\sigma(\mathrm{T})\subset\mathbb{R}^{+*}$.

**5.** Dans cette question, pour alléger les indices, on écrira « $\lambda$ » pour « $\lambda\in\sigma(\mathrm{T})$ ». On fera de même avec « $\mu$ » si nécessaire.

Raisonnons par analyse-synthèse.

Préambule. Comme $\mathrm{T}\in\mathcal{S}_n$, d'après le théorème spectral, $\mathbb{R}^n=\bigoplus_\lambda E_\lambda(\mathrm{T})$, et les $E_\lambda(\mathrm{T})$ sont orthogonaux. Alors d'une part,

$$(*)\qquad \forall x\in\mathbb{R}^n,\exists!(x_\lambda)_\lambda\in\textstyle\prod_\lambda E_\lambda(\mathrm{T}),\ x=\sum_\lambda x_\lambda.$$

Et d'autre part, pour tous $\lambda\neq\mu$ dans $\sigma(\mathrm{T})$ et pour tous $x\in E_\lambda(\mathrm{T})$ et $y\in E_\mu(\mathrm{T})$, $(x,y)=0$.

Analyse. Supposons qu'il existe $\mathrm{U}\in\mathcal{S}_n$ tel que

$$(3)\qquad \forall\lambda\in\sigma(\mathrm{T}),\forall y\in E_\lambda(\mathrm{T}),\ \mathrm{U}(y)=f(\lambda)\,y.$$

Alors, avec la linéarité et la propriété (3) supposée,

$$\mathrm{U}(x)=\textstyle\sum_\lambda\mathrm{U}(x_\lambda)=\sum_\lambda f(\lambda)\,x_\lambda.$$

Synthèse. Considérons l'application $U$ définie comme suit : pour $x\in\mathbb{R}^n$ qui se décompose de façon unique en $x=\sum_\lambda x_\lambda$ d'après $(*)$, posons

$$\mathrm{U}(x)=\textstyle\sum_\lambda f(\lambda)\,x_\lambda.$$

*Définition.* Cette définition est valide, car l'écriture donnée par $(*)$ est unique.

*Linéarité.* Soient $x$ et $y$ dans $\mathbb{R}^n$ et $\alpha\in\mathbb{R}$. Écrivons de façon unique $x=\sum_\lambda x_\lambda$ et $y=\sum_\lambda y_\lambda$ d'après $(*)$.

Comme on s'intéresse à $\mathrm{U}(x+\alpha\,y)$, introduisons $z=x+\alpha\,y$. Avec $(*)$, il s'écrit de façon unique $z=\sum_\lambda z_\lambda$. Mais on a aussi

$$z=x+\alpha\,y=\textstyle\sum_\lambda x_\lambda+\alpha\sum_\lambda y_\lambda=\sum_\lambda(x_\lambda+\alpha\,y_\lambda).$$

Par unicité d'une telle décomposition, puisque $x_\lambda+\alpha\,y_\lambda\in E_\lambda(\mathrm{T})$, on en tire que $z_\lambda=x_\lambda+\alpha\,y_\lambda$. Alors

$$\begin{aligned}\mathrm{U}(x+\alpha\,y)&=\textstyle\sum_\lambda f(\lambda)\,z_\lambda=\sum_\lambda f(\lambda)\,(x_\lambda+\alpha\,y_\lambda)\\&=\textstyle\sum_\lambda f(\lambda)\,x_\lambda+\sum_\lambda f(\lambda)\,\alpha\,y_\lambda\\&=\mathrm{U}(x)+\alpha\,\mathrm{U}(y).\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{U}$ est bien linéaire.

*Symétrie.* Gardons $x$ et $y$ comme ci-dessus. Par bilinéarité du produit scalaire,

$$\begin{aligned}(\mathrm{U}(x),y)&=\big(\textstyle\sum_\lambda f(\lambda)\,x_\lambda,\sum_\mu y_\mu\big)\\&=\textstyle\sum_{\lambda,\mu}f(\lambda)\,(x_\lambda,y_\mu).\end{aligned}$$

Avec l'orthogonalité des $E_\lambda(\mathrm{T})$, $(x_\lambda,y_\mu)=0$ si $\lambda\neq\mu$, donc

$$(\mathrm{U}(x),y)=\textstyle\sum_\lambda f(\lambda)\,(x_\lambda,y_\lambda).$$

Puisque cette expression est symétrique en $x$ et $y$,

$$(\mathrm{U}(x),y)=(x,\mathrm{U}(y)).$$

Ainsi, $\mathrm{U}$ est bien symétrique.

*Propriété (3).* Soient $\lambda\in\sigma(\mathrm{T})$ et $y\in E_\lambda(\mathrm{T})$. Par unicité de la décomposition $y=\sum_\mu y_\mu$ d'après $(*)$, si $\mu\neq\lambda$, $y_\mu=0$, et $y_\lambda=y$. Donc

$$\mathrm{U}(y)=\textstyle\sum_\mu f(\mu)\,y_\mu=f(\lambda)\,y_\lambda=f(\lambda)\,y.$$

Conclusion. Par analyse-synthèse, il existe un unique $\mathrm{U}\in\mathcal{S}_n$ qui vérifie la propriété (3).

**6.** Oui, grâce à l'unicité démontrée ci-dessus, puisque $p(\mathrm{T})$ et $\sum_{j=0}^k\alpha_k\,\mathrm{T}^k$ coïncident sur les $E_\lambda(\mathrm{T})$.

**7.** Non. Prouvons-le.

Notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ les valeurs propres *distinctes* de $\mathrm{T}$. Soit $g : J \to \mathbb{R}$. Par construction, d'après la question 5, $g(\mathrm{T})$ est entièrement déterminé par les $g(\lambda_i)$. D'après l'interpolation de Lagrange, il existe un unique polynôme $p$ de degré inférieur ou égal à $k$ tel que pour tout $i \in [\![1, k]\!]$, $p(\lambda_i) = g(\lambda_i)$. Alors, grâce à l'unicité invoquée, $p(\mathrm{T}) = g(\mathrm{T})$, et $g(\mathrm{T})$ est un polynôme en $\mathrm{T}$ d'après la question 6.

**8.** Par construction à la question 5,

les vecteurs propres de $\mathrm{T}$ associés à $\lambda \in \sigma(\mathrm{T})$ sont aussi propres pour $f(\mathrm{T})$ associés à $f(\lambda)$.

Et comme $\mathbb{R}^n = \bigoplus_{\lambda\in\sigma(\mathrm{T})} E_\lambda(\mathrm{T})$, $f(\mathrm{T})$ n'a pas d'autre vecteur propre, donc pas non plus d'autre valeur propre.

**9.** D'après la question 7, il existe des polynômes $p$ et $q$ tels que $f(\mathrm{T}) = p(\mathrm{T})$ et $g(\mathrm{T}) = q(\mathrm{T})$. Alors

$$(fg)(\mathrm{T}) = (pq)(\mathrm{T}) = p(\mathrm{T}) \circ q(\mathrm{T}) = f(\mathrm{T}) \circ g(\mathrm{T}).$$

**10.** Oui, car $f(\lambda) = 1/\lambda$, pour tout $\lambda \in \sigma(\mathrm{S})$. Constatons que cela est permis car $\sigma(\mathrm{S}) \subset \mathbb{R}^{+*}$ et que $f$ est bien définie sur $\sigma(\mathrm{S})$.

**11.** Comme $\sigma(\mathrm{S}) \subset \mathbb{R}^+$, $f$ est définie sur $\sigma(\mathrm{S})$ donc $\sqrt{\mathrm{S}}$ est bien définie. De plus, comme $f \cdot f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ et que $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(\mathrm{S}) = \mathrm{S}$, avec la question 9, on a

$$(f \cdot f)(\mathrm{S}) = f(\mathrm{S}) \circ f(\mathrm{S}) = \mathrm{S}$$

c'est-à-dire $f(\mathrm{S})^2 = \mathrm{S}$.

$\sqrt{\mathrm{S}}$ est bien définie et $(\sqrt{\mathrm{S}})^2 = \mathrm{S}$.

L'équation $\mathrm{C}^2 = \mathrm{S}$ admet évidemment comme solution $\mathrm{C} = \sqrt{\mathrm{S}}$, laquelle est bien dans $\mathcal{S}_n^+$ puisque ses valeurs propres sont les racines carrées, par essence positives, de celles de $\mathrm{S}$. C'est donc la seule de $\mathcal{S}_n^+$, grâce à l'unicité de la question 5.

En revanche, si l'on permet des valeurs propres non positives, en choisissant $\pm\sqrt{\lambda}$ ($\lambda \in \sigma(\mathrm{T})$) comme valeurs propres de $\mathrm{C}$, il y a $2^n$ choix possibles.

L'équation $\mathrm{C}^2 = \mathrm{S}$ admet une seule solution dans $\mathcal{S}_n^+$ et $2^n$ dans $\mathcal{S}_n$.

**12.** Soient $\mathrm{T}_1$, $\mathrm{T}_2$ et $\mathrm{T}_3$ dans $\mathcal{S}_n$.

Remarque. Pour le confort de la suite, interprétons différemment la définition :

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_2 \geqslant \mathrm{T}_1 &\iff \mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1 \in \mathcal{S}_n^+ \\ &\iff \sigma(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1) \subset \mathbb{R}^+ \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}^n,\ \big((\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1)(x), x\big) \geqslant 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}^n,\ (\mathrm{T}_2(x), x) - (\mathrm{T}_1(x), x) \geqslant 0 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}^n,\ (\mathrm{T}_2(x), x) \geqslant (\mathrm{T}_1(x), x). \end{aligned}$$

*Réflexivité.* Bien-sûr, $\mathrm{T}_1 \geqslant \mathrm{T}_1$, car pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $(\mathrm{T}_1(x), x) \geqslant (\mathrm{T}_1(x), x)$. La relation $\geqslant$ est réflexive.

*Antisymétrie.* Si $\mathrm{T}_2 \geqslant \mathrm{T}_1$ et $\mathrm{T}_1 \geqslant \mathrm{T}_2$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\big((\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1)(x), x\big) \geqslant 0$ et $\big((\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1)(x), x\big) \leqslant 0$, donc $\big((\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1)(x), x\big) = 0$. Alors $\mathcal{Q}_{\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1} = 0$ donc d'après la question 3, $m(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1) = M(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1) = 0$, d'où $\sigma(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1) = \{0\}$. Ainsi, $\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1$ est diagonalisable avec pour seule valeur propre 0, c'est l'endomorphisme nul : $\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1 = 0$ et $\mathrm{T}_2 = \mathrm{T}_1$. La relation $\geqslant$ est antisymétrique.

*Transitivité.* Si $\mathrm{T}_2 \geqslant \mathrm{T}_1$ et $\mathrm{T}_3 \geqslant \mathrm{T}_2$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $(\mathrm{T}_2(x), x) \geqslant (\mathrm{T}_1(x), x)$ et $(\mathrm{T}_3(x), x) \geqslant (\mathrm{T}_2(x), x)$, donc $(\mathrm{T}_3(x), x) \geqslant (\mathrm{T}_1(x), x)$ et $\mathrm{T}_3 \geqslant \mathrm{T}_1$. La relation $\geqslant$ est transitive.

*Comparabilité.* Enfin, en prenant $n = 2$, $\mathrm{T}_1$ représenté dans la base canonique par la matrice $\mathrm{diag}(2, 1)$ et $\mathrm{T}_2$ par $\mathrm{diag}(1, 2)$, alors $\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1$ a pour matrice $\mathrm{diag}(-1, 1)$ et n'est ni positif ni négatif. Donc $\mathrm{T}_1$ et $\mathrm{T}_2$ ne sont pas comparables.

La relation $\geqslant$ est une relation d'ordre non total dans $\mathcal{S}_n$.

Supplément. Pour manier plus aisément cette relation d'ordre dans la suite, constatons que

$$\begin{aligned} &\forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \forall (\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \mathrm{T}_3) \in \mathcal{S}_n^3, \\ &\mathrm{T}_2 \geqslant \mathrm{T}_1 \Longrightarrow \alpha\mathrm{T}_2 \geqslant \alpha\mathrm{T}_1, \\ &\mathrm{T}_2 \geqslant \mathrm{T}_1 \Longrightarrow \mathrm{T}_2 + \mathrm{T}_3 \geqslant \mathrm{T}_1 + \mathrm{T}_3. \end{aligned}$$

C'est immédiat en utilisant les produits scalaires, grâce à la remarque précédente.

**13.** Comme $\mathrm{U}$ est symétrique et que $\mathrm{T}_2 \geqslant \mathrm{T}_1$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \big(\mathrm{U} \circ \mathrm{T}_2 \circ \mathrm{U}(x), x\big) &= \big(\mathrm{T}_2 \circ \mathrm{U}(x), \mathrm{U}(x)\big) \\ &\geqslant \big(\mathrm{T}_1 \circ \mathrm{U}(x), \mathrm{U}(x)\big) = \big(\mathrm{U} \circ \mathrm{T}_1 \circ \mathrm{U}(x), x\big) \end{aligned}$$

et $\mathrm{U} \circ \mathrm{T}_2 \circ \mathrm{U} \geqslant \mathrm{U} \circ \mathrm{T}_1 \circ \mathrm{U}$.

**14.** Tout d'abord,

$$\mathrm{M}_2 - \mathrm{M}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\sigma(\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1) \subset \mathbb{R}^+$ et $\mathrm{T}_2 \geqslant \mathrm{T}_1$.

D'après la question 6, la matrice de $\mathrm{T}_1^2$ est $\mathrm{M}_1^2$ ; de même pour $\mathrm{T}_2$. Alors,

$$\mathrm{M}_2^2 - \mathrm{M}_1^2 = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice est $-1$, qui vaut le produit des valeurs propres, donc l'une est négative et $\mathrm{T}_2^2 - \mathrm{T}_1^2 \notin \mathcal{S}_n^+$, donc $\mathrm{T}_2^2 \not\geqslant \mathrm{T}_1^2$ et

l'opérateur défini par $t \mapsto t^2$ n'est pas croissant.

**15.** Notons $f : t \mapsto 1/\sqrt{t}$. D'après la question 9,

$$\begin{aligned} \mathrm{U} \circ \mathrm{T}_2 \circ \mathrm{U} &= \mathrm{T}_2^{-1/2} \circ \mathrm{T}_2 \circ \mathrm{T}_2^{-1/2} \\ &= f(\mathrm{T}_2) \circ \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(\mathrm{T}_2) \circ f(\mathrm{T}_2) \\ &= (f \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \cdot f)(\mathrm{T}_2) \\ &= (t \mapsto 1)(\mathrm{T}_2) = \mathrm{I}. \end{aligned}$$

D'après la question 13, comme $\mathrm{T}_2 \geqslant \mathrm{T}_1$, $\mathrm{U} \circ \mathrm{T}_2 \circ \mathrm{U} \geqslant \mathrm{U} \circ \mathrm{T}_1 \circ \mathrm{U}$, d'où $\mathrm{I} \geqslant \mathrm{U} \circ \mathrm{T}_1 \circ \mathrm{U}$, ce qui signifie que les valeurs propres de $\mathrm{I} - \mathrm{U} \circ \mathrm{T}_1 \circ \mathrm{U}$ sont positives, ou encore que celles de $\mathrm{U} \circ \mathrm{T}_1 \circ \mathrm{U}$ sont inférieures ou égales à 1.

Alors, les valeurs propres de $(\mathrm{U} \circ \mathrm{T}_1 \circ \mathrm{U})^{-1}$, qui sont les inverses des précédentes, sont supérieures ou égales à 1, donc $(\mathrm{U} \circ \mathrm{T}_1 \circ \mathrm{U})^{-1} \geqslant \mathrm{I}$, c'est-à-dire $\mathrm{U}^{-1} \circ \mathrm{T}_1^{-1} \circ \mathrm{U}^{-1} \geqslant \mathrm{I}$.

Toujours avec la question 13, on en tire que

$$\mathrm{U} \circ \mathrm{U}^{-1} \circ \mathrm{T}_1^{-1} \circ \mathrm{U}^{-1} \circ \mathrm{U} \geqslant \mathrm{U} \circ \mathrm{I} \circ \mathrm{U}$$

ou encore $\mathrm{T}_1^{-1} \geqslant \mathrm{U}^2 = (\mathrm{T}_2^{-1/2})^2 = \mathrm{T}_2^{-1}$.

Ainsi, $-\mathrm{T}_1^{-1} \leqslant -\mathrm{T}_2^{-1}$ et l'opérateur défini par $t \mapsto -1/t$ est croissant.

**16.** Si l'on avait des nombres, ou même si les endomorphismes commutaient, on pourrait dire

$$\mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1 = (\sqrt{\mathrm{T}_2} + \sqrt{\mathrm{T}_1}\,) \circ (\sqrt{\mathrm{T}_2} - \sqrt{\mathrm{T}_1}\,).$$

Ce n'est peut-être pas vrai mais l'on peut s'en inspirer : pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, puisque les endomorphismes manipulés sont symétriques, on a

$$\begin{aligned} &\big((\sqrt{\mathrm{T}_2} + \sqrt{\mathrm{T}_1}\,) \circ (\sqrt{\mathrm{T}_2} - \sqrt{\mathrm{T}_1}\,)(x), x\big) \\ &= \big((\sqrt{\mathrm{T}_2} - \sqrt{\mathrm{T}_1}\,)(x), (\sqrt{\mathrm{T}_2} + \sqrt{\mathrm{T}_1}\,)(x)\big) \\ &= \big(\sqrt{\mathrm{T}_2}(x), \sqrt{\mathrm{T}_2}(x)\big) - \big(\sqrt{\mathrm{T}_1}(x), \sqrt{\mathrm{T}_2}(x)\big) \\ &\quad + \big(\sqrt{\mathrm{T}_2}(x), \sqrt{\mathrm{T}_1}(x)\big) - \big(\sqrt{\mathrm{T}_1}(x), \sqrt{\mathrm{T}_1}(x)\big) \\ &= \big(\sqrt{\mathrm{T}_2} \circ \sqrt{\mathrm{T}_2}(x), x\big) - \big(\sqrt{\mathrm{T}_1} \circ \sqrt{\mathrm{T}_1}(x), x\big) \\ &= \big(\mathrm{T}_2(x), x\big) - \big(\mathrm{T}_1(x), x\big) \geqslant 0, \end{aligned}$$

d'après la question 11, et parce que par hypothèse $\mathrm{T}_2 \geqslant \mathrm{T}_1$. Si l'on considère maintenant une valeur propre $\lambda$ de $\sqrt{\mathrm{T}_2} - \sqrt{\mathrm{T}_1}$ et un vecteur propre $x$ associé, on a donc

$$\begin{aligned} &\big((\sqrt{\mathrm{T}_2} - \sqrt{\mathrm{T}_1})(x), (\sqrt{\mathrm{T}_2} + \sqrt{\mathrm{T}_1})(x)\big) \\ &= \lambda\big(x, (\sqrt{\mathrm{T}_2} + \sqrt{\mathrm{T}_1}\,)(x)\big) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Or $\big(x, (\sqrt{\mathrm{T}_2} + \sqrt{\mathrm{T}_1}\,)(x)\big) \geqslant 0$, donc on peut conclure que $\lambda \geqslant 0$ si $\big(x, (\sqrt{\mathrm{T}_2} + \sqrt{\mathrm{T}_1}\,)(x)\big) > 0$. Mais, en supposant que $\big(x, (\sqrt{\mathrm{T}_2} + \sqrt{\mathrm{T}_1}\,)(x)\big) = 0$, on a $\big(x, \sqrt{\mathrm{T}_2}(x)\big) = -\big(x, \sqrt{\mathrm{T}_1}(x)\big)$ d'où

$$\big((\sqrt{\mathrm{T}_2} - \sqrt{\mathrm{T}_1})(x), x\big) = 2\big(\sqrt{\mathrm{T}_2}(x), x\big) \geqslant 0.$$

Mais par ailleurs, $\big((\sqrt{\mathrm{T}_2} - \sqrt{\mathrm{T}_1})(x), x\big) = \lambda \|x\|^2$ donc $\lambda \geqslant 0$. Dans tous les cas, $\lambda \geqslant 0$, donc

$\sigma(\sqrt{\mathrm{T}_2} - \sqrt{\mathrm{T}_1}\,) \subset \mathbb{R}^+$, donc $\sqrt{\mathrm{T}_2} \geqslant \sqrt{\mathrm{T}_1}$ et l'opérateur défini par $t \mapsto \sqrt{t}$ est croissant.

**17.** Soit $u \in \mathbb{R}_+$. D'après l'énoncé, $f_u$ est définie sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc si $\mathrm{T} \in \mathcal{S}_n$, pour envisager de parler de $f_u(\mathrm{T})$, il est déjà nécessaire que $\sigma(\mathrm{T}) \subset \mathbb{R}^{+*}$, donc que $T \in \mathcal{S}_n^{+*}$.

Si $u = 0$, $f_0 : t \mapsto 1$. Dans ce cas, pour $\mathrm{T}_1$ et $\mathrm{T}_2$ dans $\mathcal{S}_n^{+*}$, $f_0(\mathrm{T}_1) = \mathrm{I}$ et $f_0(\mathrm{T}_2) = \mathrm{I}$, donc

$$\mathrm{T}_2 \geqslant \mathrm{T}_1 \Longrightarrow f_0(\mathrm{T}_2) \geqslant f_0(\mathrm{T}_1).$$

Soit $u \in \mathbb{R}^{+*}$. Tout d'abord, pour tout $t > 0$,

$$f_u(t) = \frac{t + u - u}{t + u} = 1 - \frac{1}{1 + \frac{t}{u}}.$$

Soit $\mathrm{T} \in \mathrm{S}_n^{+*} : \sigma(\mathrm{T}) \subset \mathbb{R}^{+*}$. Alors $\mathrm{I} + \frac{1}{u}\mathrm{T}$ est inversible car $-\frac{1}{u} < 0$ donc $-\frac{1}{u} \notin \sigma(\mathrm{T})$. Alors

$$f_u(\mathrm{T}) = \mathrm{I} - (\mathrm{I} + \tfrac{1}{u}\mathrm{T})^{-1}.$$

Pour $\mathrm{T}_1$ et $\mathrm{T}_2$ dans $\mathcal{S}_n^{+*}$, avec les remarques de la question 12 et la question 15, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{T}_2 \geqslant \mathrm{T}_1 &\Longrightarrow \tfrac{1}{u}\mathrm{T}_2 \geqslant \tfrac{1}{u}\mathrm{T}_1 \\ &\Longrightarrow \mathrm{I} + \tfrac{1}{u}\mathrm{T}_2 \geqslant \mathrm{I} + \tfrac{1}{u}\mathrm{T}_1 \\ &\Longrightarrow -(\mathrm{I} + \tfrac{1}{u}\mathrm{T}_2)^{-1} \geqslant -(\mathrm{I} + \tfrac{1}{u}\mathrm{T}_1)^{-1} \\ &\Longrightarrow \mathrm{I} - (\mathrm{I} + \tfrac{1}{u}\mathrm{T}_2)^{-1} \geqslant \mathrm{I} - (\mathrm{I} + \tfrac{1}{u}\mathrm{T}_1)^{-1} \\ &\Longrightarrow f_u(\mathrm{T}_2) \geqslant f_u(\mathrm{T}_1). \end{aligned}$$

**18.** Si l'on change de base, il existera une matrice de passage $P$ telle que la nouvelle matrice soit

$$\Psi = P^{-1}\Phi P.$$

Cela signifie que les coefficients $\Psi_{ij}$ de cette matrice sont des combinaisons linéaires des coefficients $\Phi_{ij}$ de l'ancienne matrice. Alors, leur caractère continu et intégrable est acquis. De plus, en intégrant, on ne change pas les combinaisons linéaires, par linéarité de l'intégrale, donc on aura

$$\int_0^{+\infty} \Psi(s)\,\mathrm{d}s = P^{-1}\left(\int_0^{+\infty} \Phi(s)\,\mathrm{d}s\right)P.$$

Ainsi, la matrice $\int_0^{+\infty} \Psi(s)\mathrm{d}s$ représente bien le même endomorphisme que $\int_0^{+\infty} \Phi(s)\,\mathrm{d}s$, mais dans la nouvelle base.

La définition de l'endomorphisme $\int_0^{+\infty} \varphi(s)\,\mathrm{d}s$ ne dépend donc pas de la base choisie pour le représenter.

**19.** D'après la question 5, il suffit de travailler sur les fonctions $g_\lambda : u \mapsto f_u(\lambda)u^{a-1}$, pour $\lambda$ parcourant $\sigma(\mathrm{S})$. Soit un tel $\lambda > 0$. La fonction $g_\lambda$ est évidemment continue sur $\mathbb{R}^{+*}$. En 0,

$$g_\lambda(u) \sim u^{a-1} = \frac{1}{u^{1-a}},$$

où la fonction $u \mapsto 1/u^{1-a}$ est intégrable sur $]0, 1]$ car $1 - a < 1$, donc $g_\lambda$ l'est aussi. En $+\infty$,

$$g_\lambda(u) \sim \frac{\lambda}{u^{2-a}},$$

où la fonction $u \mapsto 1/u^{2-a}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ car $2 - a > 1$, donc $g_\lambda$ l'est aussi. Finalement, $g_\lambda$ est intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$ pour tout $\lambda \in \sigma(\mathrm{S})$,

donc $\varphi$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}^{+*}$.

**20.** En travaillant à nouveau sur le spectre, pour tout $\lambda \in \sigma(\mathrm{s})$,

$$\lambda^a = \frac{\sin a\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} f_u(\lambda)\, u^{a-1}\, \mathrm{d}u,$$

donc, toujours d'après 5,

$$\mathrm{s}^a = \frac{\sin a\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} f_u(\mathrm{s})\, u^{a-1}\, \mathrm{d}u.$$

**21.** Si $\varphi$ et $\psi$ sont des fonctions de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathcal{S}_n^+$, continues, intégrables sur $\mathbb{R}^{+*}$, et telles que pour tout $s \in \mathbb{R}^{+*}$, $\varphi(s) \geqslant \psi(s)$, alors

$$\int_0^{+\infty} \varphi(s)\, \mathrm{d}s \geqslant \int_0^{+\infty} \psi(s)\, \mathrm{d}s.$$

En effet, fixons une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $s \in \mathbb{R}^{+*}$, on a

$$\big(\varphi(s)(x), x\big) \geqslant \big(\psi(s)(x), x\big),$$

ce qui donne, en notant $X$, $\Phi(s)$ et $\Psi(s)$ les matrices respectives de $x$, $\varphi(s)$ et $\psi(s)$ dans la base $\mathcal{B}$,

$$X^\top \Phi(s)\, X \geqslant X^\top \Psi(s)\, X.$$

Par croissance de l'intégrale, on a

$$\int_0^{+\infty} X^\top \Phi(s)\, X\, \mathrm{d}s \geqslant \int_0^{+\infty} X^\top \Psi(s)\, X\, \mathrm{d}s,$$

étant entendu qu'on fait le calcul pour chaque coordonnée. Du coup, puisque $X$ ne dépend pas de $s$,

$$X^\top \left(\int_0^{+\infty} \Phi(s)\, \mathrm{d}s\right) X \geqslant X^\top \left(\int_0^{+\infty} \Psi(s)\, \mathrm{d}s\right) X,$$

ce qui traduit

$$\left(\left(\int_0^{+\infty} \varphi(s)\, \mathrm{d}s\right)(x), x\right) \geqslant \left(\left(\int_0^{+\infty} \psi(s)\, \mathrm{d}s\right)(x), x\right),$$

ce que l'on voulait.

Alors, pour tous $\mathrm{t}_1$ et $\mathrm{t}_2$ dans $\mathcal{S}_n^+$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{t}_2 \geqslant \mathrm{t}_1 &\Longrightarrow \forall u \in \mathbb{R}^{+*},\ f_u(\mathrm{t}_2) \geqslant f_u(\mathrm{t}_1) \\
&\Longrightarrow \forall u \in \mathbb{R}^{+*},\ f_u(\mathrm{t}_2)\, u^{a-1} \geqslant f_u(\mathrm{t}_1)\, u^{a-1} \\
&\Longrightarrow \int_0^{+\infty} f_u(\mathrm{t}_2)\, u^{a-1}\, \mathrm{d}u \geqslant \int_0^{+\infty} f_u(\mathrm{t}_1)\, u^{a-1}\, \mathrm{d}u \\
&\Longrightarrow \frac{\sin a\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} f_u(\mathrm{t}_2)\, u^{a-1}\, \mathrm{d}u \\
&\qquad \geqslant \frac{\sin a\pi}{\pi} \int_0^{+\infty} f_u(\mathrm{t}_1)\, u^{a-1}\, \mathrm{d}u \\
&\Longrightarrow \mathrm{t}_2^a \geqslant \mathrm{t}_1^a.
\end{aligned}$$

La dernière étape est permise puisque $a \in \,]0, 1[$ donc $\sin a\pi > 0$.